

# Ondes et optique

## Fascicule de TD

- TD1 : Autour des équations de Maxwell*
- TD2 : Les lunettes 3D passives*
- TD3 : Pourquoi le ciel est-il bleu ?*
- TD4 : Ondes en présence d'une interface*
- TD5 : Conducteurs et diélectriques*
- TD6 : Transmission dans une ligne télécom*
- TD7 : L'oeil et ses pathologies*
- TD8 : Méthodes graphiques et algébriques en optique géométrique*
- Appendice : Exercices sur les opérateurs de l'analyse vectorielle*

**S. Fumeron**

## TD1 : Autour des équations de Maxwell

### Exercice 1. La lévitation magnétique

Le shinkansen est le train à très grande vitesse (record à 603 km/h, auparavant détenu par le TGV à 574 km/h) en service au Japon. Tout comme son homologue chinois, le CRH2, il s'appuie sur la technologie Maglev, qui utilise la lévitation magnétique du train grâce à des rails supraconducteurs. La supraconductivité est un phénomène qui se produit lorsque l'on refroidit certains métaux (Hg, Al, Pb, Sn...) à très basses températures : on observe alors la disparition de toute résistivité (pas de pertes Joule) en raison d'effets purement quantiques. On se propose ici d'étudier l'effet Meissner, responsable de la lévitation magnétique du supraconducteur.



FIGURE 1 – **A gauche** : le shinkansen série 800. **A droite** : l'effet Meissner.

Comme on est dans un métal, on considèrera dans ce qui suit  $\rho = 0$ . En présence d'un champ électromagnétique, les électrons sont soumis à la force de Lorentz mais lorsque la vitesse des charges est faible devant  $c$ , seule la partie électrique du champ contribue de façon significative. De plus, comme la résistivité est nulle, les électrons ne subissent pas de frottement visqueux lié aux collisions avec les ions du réseau métallique. On donne  $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C et  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg.

1. En écrivant le principe fondamental de la dynamique, établir l'expression de la variation de la vitesse  $d\vec{v}/dt$  puis de la densité de courant libre  $d\vec{j}/dt$  (on rappelle que la densité de courant  $\vec{j}$  est reliée à la vitesse  $\vec{v}$  et à la charge  $q$  par  $\vec{j} = nq\vec{v}$ , où  $n$  désigne le nombre de charges par unité de volume).
2. A l'aide d'une des équations de Maxwell et de la relation  $\vec{B} = r\vec{\text{ot}}\vec{A}$ , établir l'équation de London

$$\vec{j} = \frac{-nq^2}{m} \vec{A}$$

Cette équation préserve-t-elle l'invariance de jauge ?

3. En régime stationnaire, montrer qu'alors le champ magnétique dans le supraconducteur obéit à l'équation :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{\Lambda_L^2} \vec{B} = \vec{0}$$

avec  $\Lambda_L = \sqrt{\frac{m}{nq^2\mu_0}}$ .

4. Quelle est la dimension de  $\Lambda_L$  ? Application numérique pour l'aluminium (3 électrons libres par atome,  $\rho_{Al} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $M_{Al} = 27 \text{ g.mol}^{-1}$ ). En réalité, les électrons libres du métal sont appariés en phase supraconductrice (on parle de paires de Cooper). Quel effet cela a-t-il sur la valeur de  $\Lambda_L$  ?
5. Résoudre cette équation à une dimension. Proposer une interprétation physique et expliquer l'image de droite.

## Exercice 2. Un peu de physique : le photon peut-il avoir une masse ?

Une description quantique de la lumière montre que les ondes électromagnétiques sont constituées de particules élémentaires, les photons. Ainsi, une onde plane de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$  est constituée d'une assemblée de photons, d'énergie  $E = \hbar\omega$  (relation de Planck-Einstein, où la constante de Planck réduite a pour valeur  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ ), de quantité de mouvement  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  (relation de De Broglie), se déplaçant à la vitesse  $c$  et de masse nulle. Dans les années 30, le physicien A Proca propose de considérer le cas plus général de photons massifs et obtient une version plus générale des équations de Maxwell, connue sous le nom de théorie de Maxwell-Proca :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \mu^2 V \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu^2 \vec{A} \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (4)$$

avec  $\mu = mc/\hbar$ ,  $m$  désignant l'hypothétique masse du photon.

1. Ces équations préservent-elles l'invariance de jauge ?
2. En l'absence de terme source ( $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$ ), établir l'équation des ondes dans la théorie de Maxwell-Proca.

3. On cherche une solution de l'équation des ondes sous la forme d'une onde plane de la forme (propagation selon  $+z$ ) :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (5)$$

Déterminer la relation de dispersion et en déduire l'expression de la vitesse de groupe.

4. Expérimentalement, l'observation des certaines étoiles doubles situées à environ 1000 années-lumière donne les valeurs  $\Delta t < 10^{-3}$  s pour  $\lambda_1 = 0,4 \mu\text{ m}$ ,  $\lambda_2 = 0,8 \mu\text{ m}$ . En déduire une borne supérieure pour la masse du photon (on rappelle qu'une année-lumière vaut approximativement  $9,47 \cdot 10^{15}$  m). Commenter.
5. **Pour aller au-delà du TD (facultatif)** Bien qu'invalidée dans le vide, la théorie de Proca est néanmoins adaptée pour décrire le comportement de photons dans certains milieux, comme par exemple dans les supraconducteurs conventionnels de l'exercice 1. Montrer que l'équation de London impose l'introduction des corrections de Proca dans les équations (2) et (3). La perte de l'invariance de jauge (techniquement, on parle brisure de symétrie de jauge) se traduit donc par l'apparition d'une masse pour le photon : c'est le mécanisme de Anderson-Higgs, bien connu en physique des particules.

## TD2 : Les lunettes 3D passives



FIGURE 2 – Cinéma 3D

La vision 3D provient du fait que l'œil gauche et l'œil droit perçoivent des images différentes, qui sont ensuite recombinaées par le cerveau afin de distinguer les profondeurs et les distances. Cette différence de perception provient d'une réalité biologique, à savoir la distance entre nos yeux (environ 6,5 centimètres) qui conduit à observer un même objet avec un léger changement de perspective. Le principe du cinéma 3D est de duper le cerveau en imitant le fonctionnement des yeux : il s'agit pour cela projeter sur un écran les films enregistrés par deux caméras distantes de 6,5 cm l'une de l'autre (cet entraxe est appelé base stéréoscopique), et de trouver un moyen de faire passer l'un dans l'œil droit et l'autre dans l'œil gauche. C'est précisément la fonction des lunettes 3D de réaliser ce type de filtrage et on se propose d'étudier les deux composants optiques d'une lunette passive : le polariseur et la lame quart d'onde.

a) Quel est l'effet d'un polariseur  $P_1$  sur une onde non polarisée ? On note  $\vec{E}_1$  le champ après  $P_1$ . On place un second polariseur  $P_2$  à la suite du premier. Quelle est l'amplitude  $E_{02}$  de l'onde transmise ? À quelle intensité  $I_2 = K |E_2|^2$  cela correspond-t-il ? Cette relation est appelée loi de Malus.

b) On envoie une onde de polarisation rectiligne (par exemple sortant de  $P_1$ ) sur une lame d'épaisseur  $e$  formée d'un cristal anisotrope biréfringent. Dans un tel cristal, il existe deux axes  $x$  et  $y$  perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de propagation  $z$ , tels que l'axe  $x$  est lent (l'indice pour une polarisation selon  $x$  est alors  $n_x$ ) et l'axe  $y$  est dit rapide, d'indice  $n_y < n_x$ . Le vecteur d'onde associé à une direction de polarisation selon  $x$  s'écrit  $\vec{k}_x = (n_x \omega / c) \vec{e}_z$  et celui associé à une direction de polarisation selon  $y$  s'écrit  $\vec{k}_y = (n_y \omega / c) \vec{e}_z$ .

1. On considère que l'axe de  $P_1$  est à  $45^\circ$  de  $x$  et  $y$ . Décomposez le champ incident  $\vec{E}_1$  sur la lame selon les axes  $x$  et  $y$ .

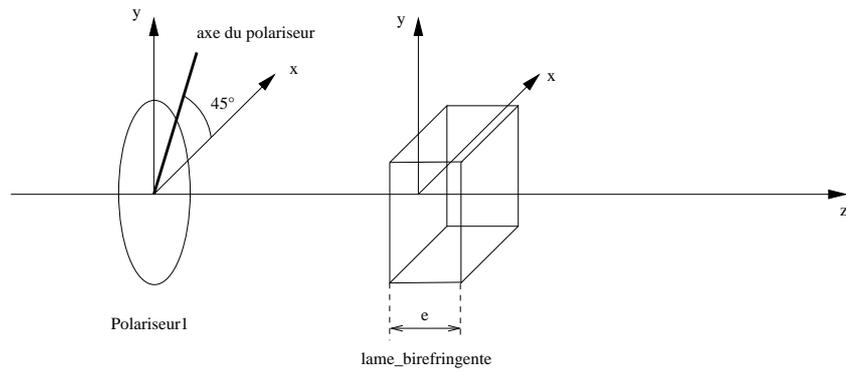


FIGURE 3 – Association série de composants optiques

2. Déterminez le champ  $\vec{E}_2$  après la traversée de la lame. À quelle condition sur le déphasage entre les composantes complexes du champ la polarisation est-elle circulaire? Démontrer qu'alors les composantes réelles vérifient bien une équation de cercle. La lame est alors dite lame quart d'onde.
- c) On envoie maintenant une onde de polarisation circulaire (par exemple circulaire droite) sur la lame quart d'onde.
1. Montrer que le champ électrique  $\vec{E}_2$  sortant de la lame quart d'onde est polarisée rectilignement. Quelle est la direction de vibration du champ électrique?
  2. Quel est l'effet d'un polariseur à  $+45^\circ$  sur l'onde sortant de la lame quart d'onde?
  3. Quel est l'effet de ce polariseur si l'onde incidente est polarisée circulaire gauche?

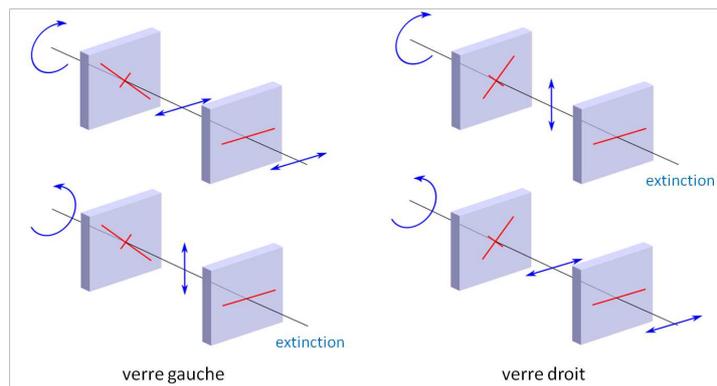


FIGURE 4 – Principe des lunettes 3D passives

d) Le principe du cinéma 3D est de projeter chacun des deux films sur l'écran, l'un en polarisation circulaire droite, l'autre en polarisation circulaire gauche. Dans le système passif, chaque verre de lunettes est composé d'une lame quart d'onde suivie d'un polariseur afin de bénéficier de ce qui a été vu en c) : pour le premier verre, le polariseur est à  $+45^\circ$ , pour le second verre il est à  $-45^\circ$ . Quel est l'avantage d'utiliser des films en polarisation circulaire par rapport à des films en polarisation rectiligne ?

## TD3 : Pourquoi le ciel est-il bleu ?

C'est à Lord Rayleigh en 1871 que l'on doit une première explication de la couleur bleue du ciel. L'idée principale est qu'une onde incidente sur une particule de très petites dimensions va être redistribuée dans toutes les directions de l'espace (on parle de diffusion), mais de façon sélective avec la fréquence. L'objectif de ce TD est d'étudier les caractéristiques principales de la diffusion Rayleigh de la lumière par les dipôles en suspension (molécules de  $N_2$  et  $O_2$  essentiellement) dans l'atmosphère terrestre.

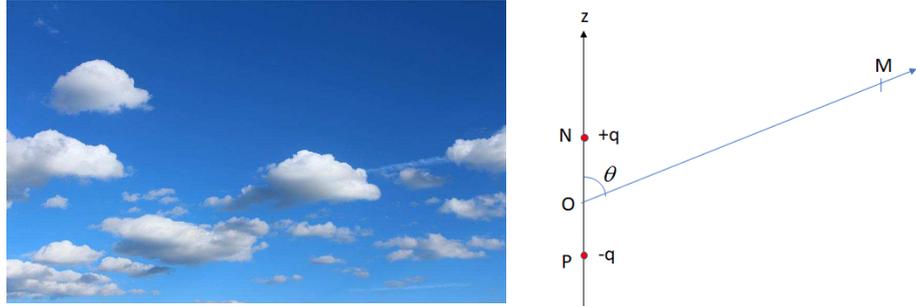


FIGURE 5 – **A gauche** : Ciel dégagé. **A droite** : le dipôle.

Un dipôle électrostatique est une particule globalement neutre composée de deux charges ponctuelles opposées  $+q$  et  $-q$ , disposées respectivement en N et P, et séparées par une distance  $PN = a$ . On note  $\vec{p}_0 = q\overrightarrow{PN} = qa\vec{e}_z$  le moment dipolaire. On rappelle l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \vec{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

ainsi que l'expression des potentiels retardés créés au point M par une charge ponctuelle située en N :

$$\begin{aligned} \vec{A}_N(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}', t' = t - NM/c)}{NM} d^3r' = \frac{\mu_0 q \vec{v}_N(t' = t - NM/c)}{4\pi NM} \\ V_N(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}', t' = t - NM/c)}{NM} d^3r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{NM} \end{aligned}$$

avec  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ,  $\vec{r}' = \overrightarrow{ON}$  et  $NM = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$ . On s'intéressera essentiellement au champ dans la zone de Fraunhofer, c'est-à-dire à très grande distance du dipôle ( $r = OM \gg a$ ).

## A. Champ électromagnétique rayonné par un dipôle

1. Comment se simplifie le retard  $t'$  dans le cas du champ à grande distance ? Quelle est l'expression du potentiel vecteur correspondant ? De manière similaire, donner l'expression du potentiel vecteur  $\vec{A}_P$  créé par la charge  $-q$  située en P.
2. A l'aide du théorème de superposition, en déduire le potentiel vecteur total créé par le dipôle en M en fonction de  $\vec{p}$ ,  $t' = t - r/c$  et  $r$ .
3. En utilisant la jauge de Lorenz  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \vec{A} = 0$ , établir l'expression de  $V$ . On rappelle que

$$\text{div} (f(r)\vec{A}) = f(r)\text{div}\vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f$$

et qu'en sphérique,

$$\text{div} \vec{e}_z = 0 \quad (\text{champ uniforme})$$

4. En utilisant la formule

$$\overrightarrow{\text{rot}} (f(r)\vec{e}_z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z$$

montrer que le champ  $\vec{B}$  a pour expression

$$\vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left( \frac{\ddot{p}(t')}{c} + \frac{\dot{p}(t')}{r} \right) \sin \theta \vec{e}_\phi$$

A l'aide de  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \partial \vec{A} / \partial t$ , on peut montrer également que

$$\vec{E}(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2\dot{p}(t')}{r^2 c} + \frac{2p(t')}{r^3} \right) \cos \theta \vec{e}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\ddot{p}(t')}{rc^2} + \frac{\dot{p}(t')}{r^2 c} + \frac{p(t')}{r^3} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta$$

## B. Analyse harmonique du rayonnement

Sous l'effet d'une onde électromagnétique incidente (par exemple, la lumière venant du soleil), les charges formant le dipôle se mettent à osciller. Grâce à la théorie de Fourier, on peut se restreindre à étudier les oscillations sinusoïdales du dipôle et utiliser la notation complexe  $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$ . Afin d'éviter les effets relativistes, on considère que les vitesses des charges du dipôle sont faibles devant  $c$ .

1. Que devient l'expression du champ magnétique ? Quel est le terme dominant à grande distance ?

2. Que devient l'expression du champ électrique ? Quel est le terme dominant à grande distance ? Comment varie ce champ selon  $\varphi$  et selon  $\theta$  ? Selon quelles directions polaires le champ est-il minimal et maximal ? Faites une représentation polaire de ce champ.
3. Calculez le vecteur de Poynting moyen. Quel est le domaine de validité de cette expression et par extension du modèle de diffusion Rayleigh ?
4. Quelle est la dépendance en fréquence de l'énergie rayonnée ? Proposer une explication pour la couleur bleue du ciel et la couleur rouge-orangée des soleils couchants.

## TD4 : Ondes en présence d'une interface, coefficients de Fresnel

On appelle dioptre toute frontière (localement plane) séparant deux milieux dont les indices de réfraction (supposés réels) sont distincts. Dans cet exercice, on prendra pour le plan du dioptre  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . Lorsqu'une onde électromagnétique en provenance du milieu 1 (appelée onde incidente) arrive sur une interface séparant le milieu 1 du milieu 2, une fraction  $r$  de l'onde incidente repart dans le milieu 1 (c'est le phénomène de réflexion de la lumière, mis à profit avec les miroirs) tandis qu'une fraction  $t$  de l'onde incidente est transmise dans le milieu 2. On cherche à déterminer ces deux fractions à partir des 4 conditions de passage des champs au niveau du dioptre :

1. conservation de la composante tangentielle de  $\vec{E}$
2. conservation de la composante normale de  $\vec{B}$
3. conservation de la composante normale de  $\vec{D}$
4. conservation de la composante tangentielle de  $\vec{H}$

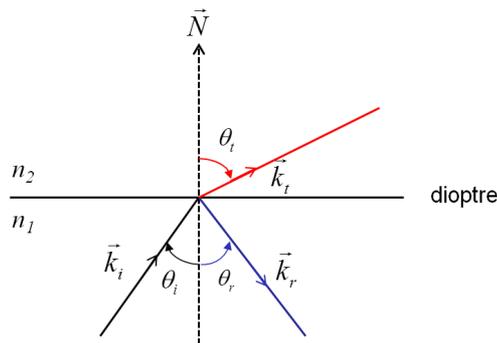


FIGURE 6 – **A gauche** : Définition des conditions de passage au travers d'un dioptre plan.

1) On considère une onde incidente de vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ , de pulsation  $\omega$ , d'amplitude  $E_{0i}$ , polarisée linéairement selon  $\vec{e}_i$ . Écrire l'expression mathématique de cette onde. Les expressions des ondes réfléchies (indice "r") et transmises (indice "t") sont identiques à celle-ci, en changeant les indices de façon convenable.

2) Soit  $\vec{N} = \vec{e}_z$  la normale au dioptre, le plan  $(\vec{N}, \vec{k}_i)$  définit le plan d'incidence. On considère une polarisation dite *TE* pour laquelle le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence (vecteur unitaire normal au plan d'incidence =  $\vec{e}_y$ ). À partir de la condition de continuité de la composante tangentielle du champ électrique, déterminez une relation entre  $E_{0i}$ ,  $E_{0r}$  et  $E_{0t}$ .

3) On note  $\theta_i$  l'angle de fait  $\vec{k}_i$  avec  $\vec{N}$  (angle orienté),  $\theta_r$  et  $\theta_t$  les angles que font  $\vec{k}_r$  et  $\vec{k}_t$  avec  $\vec{N}$  (voir figure). À quelle condition peut-on avoir continuité des champs sur l'interface (on pourra utiliser le fait que les  $\exp(i\phi_k)$  forment une famille libre c'est-à-dire que si  $\sum_k a_k \exp(i\phi_k) = 0 \Rightarrow \sum_k a_k = 0$  et  $\phi_k = \phi_0 \forall k$ ) ? En déduire les deux lois de Descartes

$$\theta_i = -\theta_r \quad (6)$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (\text{Loi de Descartes-Snell}) \quad (7)$$

Dans une fibre optique à saut d'indice, l'indice  $n_1$  du milieu incident (coeur) est supérieur à l'indice  $n_2$  du second milieu (la gaine). Discuter la loi de Descartes-Snell et mettre en évidence le phénomène de réflexion totale.

4) À partir de l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer  $\vec{H}$  en fonction de  $\vec{E}$ . À partir de la condition de continuité de  $H_{\text{tan}}$  en déduire une nouvelle relation entre  $E_{0i}$ ,  $E_{0r}$  et  $E_{0t}$ . Montrer que la condition de continuité de  $B_{\text{norm}}$  ne conduit pas à une relation supplémentaire.

5) Résoudre le système formé par les deux équations précédemment obtenues et en déduire les coefficients de transmission et de réflexion de l'onde (rapports entre les champs électriques transmis et réfléchis resp. et le champ incident).

6) De façon similaire déterminez les coefficients en polarisation  $TM$ , coefficients cette fois donnés par les rapports des champs magnétiques  $H$  transmis et réfléchis et le champ incident. Contrairement au cas  $TE$ , il existe un angle pour lequel  $r_{TM}$  s'annule, appelé angle de Brewster. Quel est son expression ?

## TD5 : Conducteurs et diélectriques

### Exercice 1. L'effet de peau dans un conducteur

En première approximation, un conducteur à l'équilibre peut être décrit comme un milieu dominé par les courants de charges libres ( $\vec{j} \neq \vec{0}$ ) et qui ne contient pas de distribution volumique de charges ( $\rho = 0$ ). Du point de vue mécanique, le mouvement de chaque charge libre est soumis à la force de Lorentz  $\vec{F}_L$  et à une force de frottement visqueux, liée aux collisions de la charges avec les autres particules constituant son environnement  $\vec{F}_v = -\alpha\vec{v}$ .

1. Quel est le rapport entre la valeur du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{B}$  dans le cas d'une onde plane dans le vide? Si la vitesse des électrons est faible devant  $c$ , que peut-on en déduire quant au rapport entre la force électrique et la force magnétique?
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation d'évolution de la vitesse  $\vec{v}$  d'une charge. Montrer qu'à basse fréquence, la densité de courants libres  $\vec{j} = nq\vec{v}$  est donnée par la loi d'Ohm microscopique :

$$\vec{j} \approx \sigma_0 \vec{E}$$

avec  $n$  la densité volumique de charges (en  $m^{-3}$ ) et  $\sigma$  la conductivité électrique statique (en  $\Omega^{-1}.m^{-1}$ ).

3. En utilisant les équations de Maxwell, montrer que le champ électrique complexe obéit à l'équation des télégraphistes :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

(on rappelle que  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}) - \Delta$ ).

4. On considère une solution de cette équation de type onde plane (de vecteur d'onde  $\vec{k}$  orienté selon  $z$  par exemple). En déduire la relation liant le module  $\tilde{k}$  du vecteur d'onde  $\vec{k}$  à la pulsation  $\omega$  dans le cas de ce milieu. Cette relation appelée équation de dispersion. Montrer que cette relation fait intervenir une permittivité relative complexe  $\tilde{\varepsilon}_r$  donnée par :

$$\tilde{\varepsilon}_r = 1 + i \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega}$$

avec  $i = \sqrt{-1}$  l'imaginaire pur.

5. Qualitativement, à basse fréquence, un bon conducteur est caractérisé par une partie imaginaire très grande devant la partie réelle, soit  $\sigma_0/(\varepsilon_0\omega) \gg 1$ . Cette hypothèse sera conservée dans toute la suite. En déduire dans ces conditions les expressions des parties réelle  $n$  et imaginaire  $\kappa$  de l'indice de réfraction complexe  $\tilde{n} = n + i\kappa$  correspondant (on rappelle que cet indice est défini de façon générale par  $\tilde{n}^2 = \tilde{\varepsilon}_r$ ).
6. Toujours en considérant une onde plane se propageant selon  $z$ , montrer que le champ électrique dans le métal peut s'écrire :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \exp\left(i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\right) \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$$

où l'on a posé  $\delta = c\sqrt{2\varepsilon_0/(\omega\sigma_0)} = \sqrt{2/(\omega\mu_0\sigma_0)}$  est une grandeur fondamentale appelée épaisseur de peau, en pratique de très faible valeur.

7. Lorsqu'une onde plane arrive sur une interface air-métal, elle peut être transmise dans le métal ou bien être réfléchiée et repartir vers l'air. Le facteur de réflexion à l'interface air-métal en incidence normale est une généralisation directe des coefficients de Fresnel (voir TD précédent) et il s'écrit

$$r_{\text{air} \rightarrow \text{métal}} = \frac{1 - \tilde{n}}{1 + \tilde{n}} = \frac{1 - (n + i\kappa)}{1 + (n + i\kappa)}$$

et la réflectivité (rapport de la puissance réfléchiée sur la puissance incidente) est définie par  $R = |r|^2$ . Toujours dans l'hypothèse d'une grande conductivité du métal, vers quelle valeur tend la réflectivité d'un métal ? Quels dispositifs optiques simples exploitent cette propriété ?

8. *Application biomédicale* : le corps humain est constitué majoritairement d'eau, qui est un milieu conducteur, et sa conductivité vaut  $\sigma_0 = 0,2 \text{ S.m}^{-1}$ . Sachant que la fréquence des téléphones portables est d'environ 2100 MHz, sur quelle épaisseur du cerveau sont absorbées les ondes émises ?

## Exercice 2. Dispersion chromatique dans une fibre optique

Comme ils sont transparents aux ondes électromagnétiques, les matériaux diélectriques sont couramment utilisés comme guides d'ondes, parmi lesquels les fibres optiques. Ils sont agencés sous la forme de deux cylindres concentriques : le coeur est un cylindre central plein composé du milieu d'indice le plus élevé  $n_1$ , et il est entouré d'une gaine, d'indice  $n_2$ . Le matériau de base pour le coeur et la gaine est la silice  $\text{SiO}_2$ , auquel on adjoint des faibles quantités de dopants pour accroître très légèrement l'indice de coeur (dopage avec Ge, Al...) et diminuer très légèrement l'indice de gaine (dopage au B, F...). Dans la gamme télécom

( $0,85\mu m \leq \lambda \leq 1,55\mu m$ ), on peut utiliser la relation de Sellmeier (écrite en longueur d'onde) :

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{0,6962\lambda^2}{\lambda^2 - (0,0684)^2} + \frac{0,4079\lambda^2}{\lambda^2 - (0,1162)^2} + \frac{0,8974\lambda^2}{\lambda^2 - (9,8961)^2} \quad (8)$$

1. Calculer les valeurs numériques de  $n$  pour les 3 fenêtres de transmission télécom :  $\lambda_1 = 0,85\mu m$ ,  $\lambda_2 = 1,3\mu m$  et  $\lambda_3 = 1,55\mu m$ .

Le principe de transmission par fibre optique est d'encoder l'information à transmettre en faisant varier (en **modulant**) un des paramètres (amplitude, phase, polarisation...) d'une onde appelée **porteuse** au rythme des variations temporelles du signal d'information. La porteuse a une fréquence dans le domaine télécom.

2. Démontrer la formule de Rayleigh qui relie la vitesse de phase  $v_\phi$  et la vitesse de groupe  $v_g$  :

$$v_g = v_\phi - \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda} \quad (9)$$

On considère une transmission en modulation d'amplitude, c'est-à-dire qu'à l'émission, le champ modulé est de la forme ( $\Omega \ll \omega_0$ ) :

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 (1 + A \cos(\Omega t)) \cos(\omega_0 t) \quad (10)$$

3. Montrer qu'un tel champ possède trois pulsations caractéristiques  $\omega_0$ ,  $\omega_0 - \Omega$  et  $\omega_0 + \Omega$ .

On transmet ensuite le champ modulé, en le propageant selon l'axe  $+x$ . L'onde modulée propagative est obtenue en remplaçant dans l'expression du champ précédent  $\omega t \rightarrow \omega t - k(\omega)x = t - \frac{\omega}{v_\phi(\omega)}x$ .

4. Quelle est la vitesse de propagation de la modulation (information) et quelle est la vitesse de propagation de la porteuse ?

En pratique, une onde modulée n'est donc pas une onde plane, mais plutôt un paquet d'ondes, c'est-à-dire un ensemble d'ondes planes de longueurs d'onde très proches les unes des autres et réparties dans une bande spectrale étroite  $\delta\lambda$ . Pour une fibre de longueur  $L$ , le temps de transit de l'information est alors donné par

$$T_{tr} = \frac{L}{v_g} = L \frac{dk}{d\omega} = L \frac{d(n\omega/c)}{d\omega} = \frac{L}{c} \left( n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (11)$$

5. En raison de la relation de Sellmeier, le second terme de la formule précédente est non-nul. Quelle est en la conséquence ? Que peut-on en conclure concernant la qualité de l'information restituée en sortie de la fibre ? Ce phénomène est appelé dispersion chromatique.

## TD6 : Transmission dans une ligne télécom

On modélise une ligne télécom par une fibre optique multimode cylindrique à saut d'indice d'axe  $x$ , constituée d'un coeur d'indice constant  $n_c$ , de rayon  $R_c$  entouré par une gaine d'indice  $n_g$ , de rayon externe  $R_g$ . On injecte un signal grâce une diode laser depuis l'air (d'indice  $n_0 \approx 1$ ). On dope la silice composant la fibre de sorte que  $n_c = 1,515$  et  $n_g = 1,490$ . Un rayon lumineux monochromatique atteint la face d'entrée de la fibre en  $O$ , sous l'angle d'incidence  $\theta_i$ .

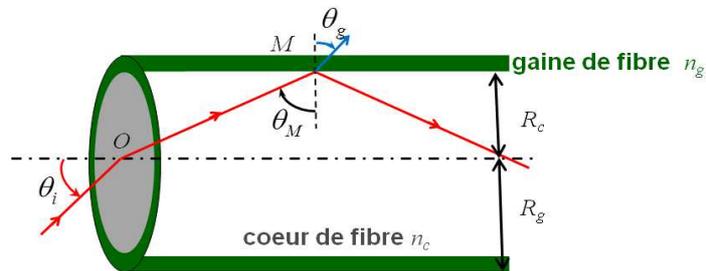


FIGURE 7 - .

### 1. Principe du guidage

1. Ecrire les lois de Descartes en  $O$  et  $M$ . Quel est l'inconvénient de la configuration optique au point  $M$  dans le cas de transmissions à grande distance ?
2. Etablir l'expression de l'angle limite (ou angle de réflexion totale) au point  $M$  en fonction de  $n_c$  et  $n_g$ .  
Afin de minimiser les pertes par transmission dans la gaine, on cherche à injecter le signal en  $O$  de façon à ce que l'angle d'incidence des rayons en  $M$  soit supérieur ou égal à l'angle de réflexion totale.
3. Montrer que le rayon est guidé en réflexion totale dans le coeur si l'angle d'incidence  $\theta_i$  est inférieur ou égal à une valeur limite  $\theta_0$  (appelé angle d'acceptance) que l'on exprimera en fonction de  $n_0$ ,  $n_c$  et  $n_g$ . Ce cône d'acceptance définit les conditions d'injection des rayons guidés dans la fibre. Calculer la valeur de l'angle d'acceptance  $\theta_0$ . Quel angle fait le rayon guidé le plus incliné par rapport à l'axe de la fibre ?
4. Pour un diamètre de coeur de 50 microns, quel est le nombre de réflexions totales effectuées par le rayon guidé le plus incliné si la fibre a pour longueur  $L=1\text{km}$  ?

## 2. Effet d'un coude

On considère que la fibre fait un coude de rayon moyen  $R$  et on cherche à déterminer les effets de cette courbure sur la qualité du guidage. On suppose pour simplifier que les rayons sont quasiment parallèles à l'axe lorsqu'ils arrivent sur la portion courbe.

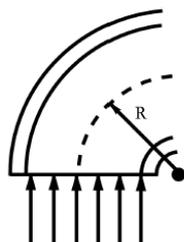


FIGURE 8 - .

1. Quel est le rayon dont l'incidence est la moins favorable sur l'interface coeur-gaine ?
2. Calculer l'angle d'incidence  $\theta_M$  de ce rayon avec l'interface coeur-gaine. A quelle condition sur  $R$  maintient-on le guidage pour tous les rayons incidents ?
3. Calculer ce rayon minimal pour  $R_c = 25\mu m$ .

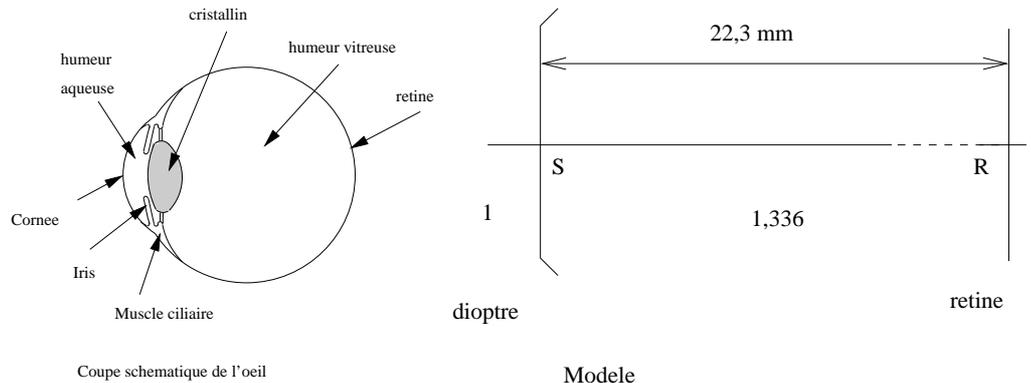
## 3. Effet de la dispersion intermodale

On se propose ici d'étudier dans le cadre de l'optique géométrique un autre phénomène susceptible de dégrader la qualité du signal transmis dans une fibre optique. Pour simplifier, on considère une situation dans laquelle la fibre est droite, sans coude.

1. Calculer l'écart entre les temps de parcours du rayon le plus incliné et du rayon parallèle à l'axe de la fibre. Faire l'application numérique pour une fibre d'un km de long.  
En pratique, l'information télécom est répartie sur plusieurs rayons (ou modes). Les différentes "pièces détachées" formant le signal à transmettre arrivent donc en sortie de fibre à des instants différents : c'est le phénomène de dispersion intermodale.
2. En tenant compte de la dispersion intermodale, calculer le nombre maximal de bits transmis par seconde pour une fibre d'un km de long.

## TD7 : L'oeil et ses pathologies

L'optique de l'œil est formée par la cornée d'épaisseur négligeable suivie d'un liquide appelé humeur aqueuse d'indice 1,336. Vient ensuite le cristallin, lentille biconvexe d'indice 1,42 puis l'humeur vitreuse d'indice 1,336 et enfin la rétine. Le cristallin peut se déformer pour permettre la mise au point : on appelle ce phénomène l'accommodation. On peut montrer qu'au repos (sans accommodation) cette optique est équivalente à un dioptré sphérique unique (modèle de l'œil réduit ou modèle de Listing), convexe, de rayon de courbure 5,6 mm séparant le milieu extérieur (l'air) et le milieu intérieur de l'œil d'indice 1,336. Pour un œil normal ce dioptré est situé à une distance de 22,3 mm de la rétine. La vision est nette si l'image obtenue par ce dioptré sphérique se forme sur la rétine.



### 1. Œil normal, sans accommodation

- a) Déterminez la vergence  $V_1$  puis les distances focales de l'optique de l'œil.
- b) Par conséquent où se situe le plan de vision nette (plan où se situe l'objet) pour un œil normal n'accommodant pas ?

### 2. Accommodation

Lorsque l'œil accommode, le dioptré équivalent à l'optique de l'œil a un rayon de courbure qui peut diminuer jusqu'à une valeur de 5,1 mm.

- a) Que deviennent alors la vergence, que l'on notera à présent  $V_2$ , et les distances focales de l'optique de l'œil ?
- b) Par conséquent quelle est la distance du point le plus proche pouvant être vu nettement (punctum proximatum) ?

### 3. Œil myope

On considère cette fois un œil myope. Pour cet œil les paramètres de l'optique sont semblables à ceux d'un œil normal mais le globe oculaire est trop allongé. On suppose un œil myope tel que la rétine se trouve à 24,1 mm du dioptré équivalent.

a) Où se forme l'image d'un point à l'infini ? Quelle est la distance du point le plus éloigné pouvant être vu nettement (punctum remotum) ? Quelle est la distance du point le plus proche pouvant être vu nettement ?

b) Pour corriger cette myopie on utilise une lentille correctrice située à une distance de 20 mm du dioptré équivalent à l'optique de l'œil. Quelle doit-être la vergence de cette lentille ? Est-elle convergente ou divergente ?

### 4. Œil hypermétrope

Pour un œil hypermétrope au contraire le globe oculaire est trop court. On considérera un œil hypermétrope pour lequel le point le plus proche pouvant être vu nettement en accommodant (punctum proximum) est situé à 65 cm du dioptré équivalent à l'œil.

a) À quelle distance la rétine se trouve-t-elle du dioptré équivalent ?

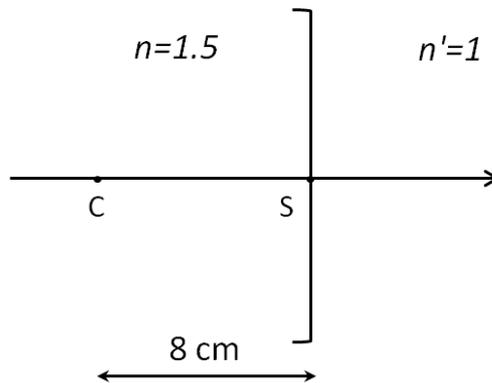
b) Où se trouve le plan de vision nette de cet œil lorsqu'il n'accommode pas ? Quelle est alors la nature des objets s'y trouvant ? Cet œil peut-il voir net à l'infini et si oui comment ? Qu'en pensez-vous ?

c) Quelle doit-être la vergence de la lentille (toujours placée à 20 mm de l'œil) permettant de corriger cet œil ? (Une fois l'œil corrigé, l'observateur doit alors voir net à l'infini sans accommoder).

## TD8 : Méthodes graphiques et algébriques en optique géométrique

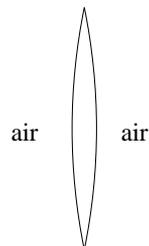
### Exercice 1. Le dioptre sphérique

On considère le dioptre sphérique ci-dessous.

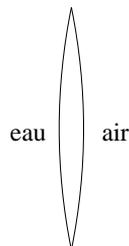


- a) Ce dioptre est-il convergent ou divergent ? Calculez sa vergence puis la position de ses foyers  $F$  et  $F'$ .
- b) Par le calcul puis par construction (échelle  $1/2$ ), déterminez la position et la taille de l'image d'un objet réel situé à  $12\text{ cm}$  de  $S$ . Idem pour un objet virtuel à  $6\text{ cm}$  de  $S$ .
- c) Mêmes questions pour un dioptre dont les indices sont inversés ( $n = 1$ ,  $n' = 1,5$ ).

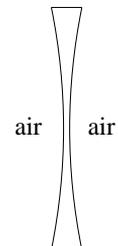
### Exercice 2. Les lentilles minces



Lentille 1



Lentille 2



Lentille 3

1- On considère une lentille mince d'indice  $n = 1,5$  composée de deux dioptries sphériques de rayons de courbure  $R_1 = -R_2 = 10$  cm. De l'air se trouve de part et d'autre de cette lentille.

a) Calculez la vergence de cette lentille, puis ses distances focales objet et image.

b) On considère un objet réel situé à 30 cm de la lentille. Par le calcul puis par construction (échelle 2/5) déterminez la position et la taille de son image

c) Mêmes questions pour un objet réel situé à 6 cm de la lentille.

2- On considère la même lentille mais avec de l'eau ( $n_{\text{eau}} = 4/3$ ) coté objet et de l'air coté image. Mêmes questions que 1-a) et 1-b). Que remarquez vous sur la construction graphique?

## Appendice : exercices sur les opérateurs de l'analyse vectorielle

### Exercice 1. Gradient d'un champ scalaire

Chaque jour, le bulletin météorologique affecte à chaque point de l'espace une valeur de température  $T$ .

1. On se place en coordonnées cartésiennes, de sorte que le champ de température varie selon  $T(x, y, z)$ . Exprimez à partir des dérivées partielles de  $T$  la variation de température  $dT$  entre deux points voisins.
2. Montrez que  $dT$  peut s'écrire comme le produit scalaire de la variation élémentaire de position  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$  par un champ de vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}} T$ , noté aussi symboliquement  $\vec{\nabla} T$ . Quelles sont les composantes du vecteur  $\vec{\nabla}$  ?
3. On se place maintenant en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Quelles sont les composantes du déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  (attention à l'homogénéité des composantes) ? En déduire les composantes du vecteur gradient dans cette base.
4. Même question en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ .

### Exercice 2. Divergence et rotationnel d'un champ vectoriel

On considère le champ de vecteurs  $\vec{V}(x, y, z) = \alpha y^2 \vec{e}_x + \beta z^2 \vec{e}_y + \gamma x^2 \vec{e}_z$ . On rappelle que

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{V} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} &= \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

1. Calculez le rotationnel de ce champ de vecteurs et montrer à l'aide de l'exercice précédent que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ .
2. Ce champ vectoriel peut-il représenter un champ magnétique ?  
On considère maintenant un champ vectoriel  $\vec{V}(r, \theta, z) = \alpha r^2 \vec{u}_r + \gamma z \vec{u}_z$

3. On rappelle que la divergence est donnée en coordonnées cylindriques par :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (12)$$

Calculez la divergence de ce champ de vecteurs. A l'aide de l'exercice précédent, calculez ce que vaudrait  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$  et comparez avec la divergence de  $\vec{V}$ . Que peut-on en conclure sur la validité de l'opérateur symbolique  $\vec{\nabla}$  pour exprimer les opérateurs de l'analyse vectorielle ?

### Exercice 3. Quelques calculs simples

On rappelle que la divergence est donnée en coordonnées sphériques par :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \quad (13)$$

1. Calculez  $\operatorname{div} \vec{r}$  en coordonnées cartésiennes et en coordonnées sphériques.
2. Calculez  $\operatorname{div} \vec{e}_r = \operatorname{div} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$  en coordonnées cartésiennes et en coordonnées sphériques. Conclusion ?
3. Calculez  $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{r}$ .
4. Calculez  $\Delta r^n$ .