

DM d'ondes et optique

Physique du four à micro-ondes

Tous les documents sont autorisés. Vous prendrez soin de bien justifier vos réponses.

L'invention du four à micro-ondes fait partie de ces innovations relevant de la sérendipité : en 1945, Percy Spencer, ingénieur de l'armée américaine, s'est aperçu par hasard que sa barre de chocolat fondait lorsqu'il travaillait à proximité d'un radar. Le principe du four à micro-ondes est d'acheminer des ondes électromagnétiques de fréquence $\nu = 2,45 \text{ GHz}$ (générées par le magnétron du radar) dans une cavité au sein de laquelle on a placé un aliment qui va absorber leur énergie et chauffer.

Cet examen comporte trois parties qui peuvent être traitées de façon quasi-indépendante. La première partie discute de la réflexion métallique d'une onde en général. Les deux parties suivantes sont consacrées au comportement des ondes électromagnétiques dans les deux éléments principaux du four : le guide d'onde métallique et la cavité micro-onde.

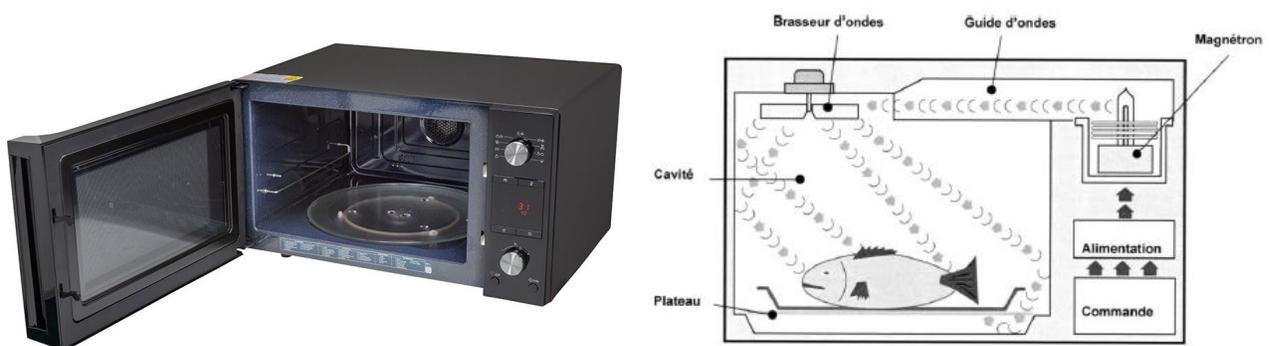


FIGURE 1. Anatomie du four à micro-ondes

I. QUELQUES IDÉES GÉNÉRALES SUR LA RÉFLEXION MÉTALLIQUE

1. Ecrire les équations de Maxwell généralisées dans la matière ainsi que les deux relations constitutives. Précisez pour chaque grandeur physique son nom et sa dimensionnalité dans la base SI (masse, longueur, temps, charge...).

Dans un métal, les termes sources s'écrivent : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (notation réelle), où σ est la conductivité du métal.

2. En utilisant la notation complexe (= champs harmoniques de type ondes planes)

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1)$$

comparer l'importance relative des termes de courant libre et de courant de déplacement dans le cas d'un bon conducteur. Montrer que dans ce cas, la fréquence ν de l'onde doit satisfaire l'inégalité :

$$\nu \ll \frac{\sigma \mu_0 c^2}{2\pi} \quad (2)$$

Pour le cuivre, $\sigma \approx 5,9 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$. La contrainte précédente est-elle vérifiée dans un four à micro-ondes ?

3. Comment se simplifie l'équation de Maxwell-Ampère ? Comment s'écrivent les trois autres équations dans le métal ? Montrer qu'alors on a

$$\Delta \underline{\vec{E}} = -i\omega \mu_0 \sigma \underline{\vec{E}} \quad (3)$$

4. Montrer que la relation de dispersion dans le métal conduit à un vecteur d'onde de la forme :

$$\tilde{k} = \frac{1+i}{\delta} \quad (4)$$

où δ est une longueur caractéristique appelée épaisseur de peau. Quelle est l'expression de δ ? Quelle est sa valeur dans le cas du cuivre et à la fréquence du four à micro-ondes ?

5. Quelle est alors l'expression de $\underline{\vec{E}}$? Indiquer les différences principales avec l'onde plane dans le vide.
6. L'approximation du conducteur parfait est suggérée par la valeur numérique très petite de δ : elle consiste à poser formellement $\delta = 0$ et $\sigma \rightarrow +\infty$. Montrer qu'alors, les champs $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ sont nuls à l'intérieur d'un conducteur parfait. On gardera cette approximation dans toute la suite.

7. *Question optionnelle* : En pratique, les miroirs les plus performants que l'on sache fabriquer (appelés miroirs de Bragg) ne sont pas réalisés à partir de métaux mais à partir de couches minces de diélectriques, disposées périodiquement à une échelle sub-longueur d'onde : par exemple dans la gamme telecom, $\lambda \approx 1,55 \mu m$ et la période spatiale du miroir est comprise entre 500 et 750 nm. Un miroir de Bragg peut alors réfléchir jusqu'à 99,5% de l'intensité lumineuse qu'il reçoit, grâce au phénomène d'interférence : à l'aide des ressources dont vous disposez (ouvrages, internet...), expliquer succinctement ce qu'est ce phénomène et comment la combinaison de deux ondes planes peut donner lieu à des interférences (expérience des fentes d'Young).

II. GUIDE D'ONDE MÉTALLIQUE

La source d'ondes du four à micro-ondes est le magnétron : sous l'effet d'une différence de potentiel, ce dispositif génère des ondes électromagnétiques dont la fréquence est de l'ordre de 2,45 GHz. Grâce à un guide d'onde métallique, ces ondes sont ensuite acheminées vers le brasseur (voir Figure 1).

8. Quelle est la longueur d'onde des ondes générées par le magnétron ? Commenter la terminologie de four à "micro-ondes". Comparer avec la gamme de fréquence des ondes d'un téléphone portable.

On considère un guide d'onde de section rectangulaire (hauteur a , largeur b) d'axe de propagation selon z (voir Figure 2). L'intérieur du guide est rempli d'air (comme $n_a = 1$, on l'assimilera dans la suite au vide) et on supposera que le métal formant le guide est un conducteur parfait : par conséquent, au niveau de chaque paroi du guide, on a $\underline{\vec{E}} = \vec{0}$ et $\underline{\vec{B}} = \vec{0}$.

Pour des champs se propageant selon z , les conditions de passage aux interfaces imposent

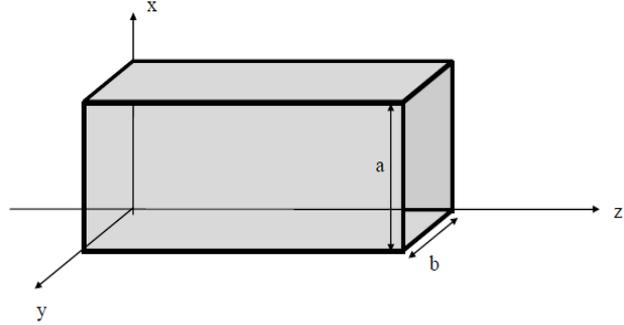


FIGURE 2. Guide d'onde métallique dans un four à micro-ondes

que les champs solutions à l'intérieur du guide d'ondes soient de la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \underline{E}_{0x}(x, y) \\ \underline{E}_{0y}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad (5)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \underline{B}_{0x}(x, y) \\ \underline{B}_{0y}(x, y) \\ \underline{B}_{0z}(x, y) \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad (6)$$

9. Quelles sont les principales différences de ces champs par rapport à ceux de l'onde plane usuelle ?
10. Comme ces champs se propagent dans le guide d'ondes, ils vérifient donc les 4 équations de Maxwell dans le vide. Etablir l'équation des ondes pour le champ \vec{B} . En déduire que la composante \underline{B}_{0z} vérifie :

$$\frac{\partial^2 \underline{B}_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{B}_{0z}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \underline{B}_{0z} = 0 \quad (7)$$

11. Montrer que l'équation (7) est vérifiée par la solution à variables séparées

$$\underline{B}_{0z}(x, y) = [a_1 \cos(\alpha x) + a_2 \sin(\alpha x)] [a_3 \cos(\beta y) + a_4 \sin(\beta y)] \quad (8)$$

à condition que k , ω , α et β obéissent à une relation de dispersion que l'on déterminera.

12. Montrer que les trois composantes de l'équation de Maxwell-Faraday dans le guide s'écrivent :

$$-ik\underline{E}_{0y}(x, y) = i\omega\underline{B}_{0x}(x, y) \quad (9)$$

$$ik\underline{E}_{0x}(x, y) = i\omega\underline{B}_{0y}(x, y) \quad (10)$$

$$\frac{\partial\underline{E}_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial\underline{E}_{0x}}{\partial y} = i\omega\underline{B}_{0z}(x, y) \quad (11)$$

13. Montrer que les trois composantes de l'équation de Maxwell-Ampère dans le guide s'écrivent :

$$\frac{\partial\underline{B}_{0z}}{\partial y} - ik\underline{B}_{0y} = -i\frac{\omega}{c^2}\underline{E}_{0x}(x, y) \quad (12)$$

$$ik\underline{B}_{0x} - \frac{\partial\underline{B}_{0z}}{\partial x} = -i\frac{\omega}{c^2}\underline{E}_{0y}(x, y) \quad (13)$$

$$\frac{\partial\underline{B}_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial\underline{B}_{0x}}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

14. En déduire les expressions de \underline{E}_{0x} et \underline{E}_{0y} en fonction des dérivées partielles de \underline{B}_{0z} , k et ω .

15. En utilisant (8), donner les expressions explicites de \underline{E}_{0x} et \underline{E}_{0y} en fonction de x et y .

16. La composante tangentielle de \vec{E} est conservée aux interfaces avec les 4 parois métalliques ($x = 0$, $x = b$, $y = 0$ et $y = a$). Montrer que cette contrainte impose que les constantes α et β ne peuvent prendre que des valeurs discrètes :

$$\alpha = m\frac{\pi}{a} \quad \text{avec } m \in \mathbb{N} \quad (15)$$

$$\beta = n\frac{\pi}{b} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad (16)$$

17. Que devient la relation de dispersion établie à la question 11? Montrer qu'il existe une fréquence de coupure ν_c en-dessous de laquelle les champs ne se propagent plus.

18. En utilisant ce qui précède, déduire que l'amplitude du champ électrique a des composantes de la forme :

$$\underline{E}_{0x}(x, y) = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (17)$$

$$\underline{E}_{0y}(x, y) = B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (18)$$

$$\underline{E}_{0z}(x, y) = 0 \quad (19)$$

Un tel champ est appelé mode TE_{mn} du guide d'ondes.

III. LA CAVITÉ MICRO-ONDE

Le brasseur disperse les modes du guide dans toute la cavité intérieure du four, que l'on modélise comme un cube métallique de dimension c . Comme le champ électrique est variable dans le temps, les dipôles permanents que sont les molécules d'eau se mettent à osciller et dissipent par effet Joule de l'énergie qui se propage par diffusion à l'ensemble de l'aliment à chauffer.

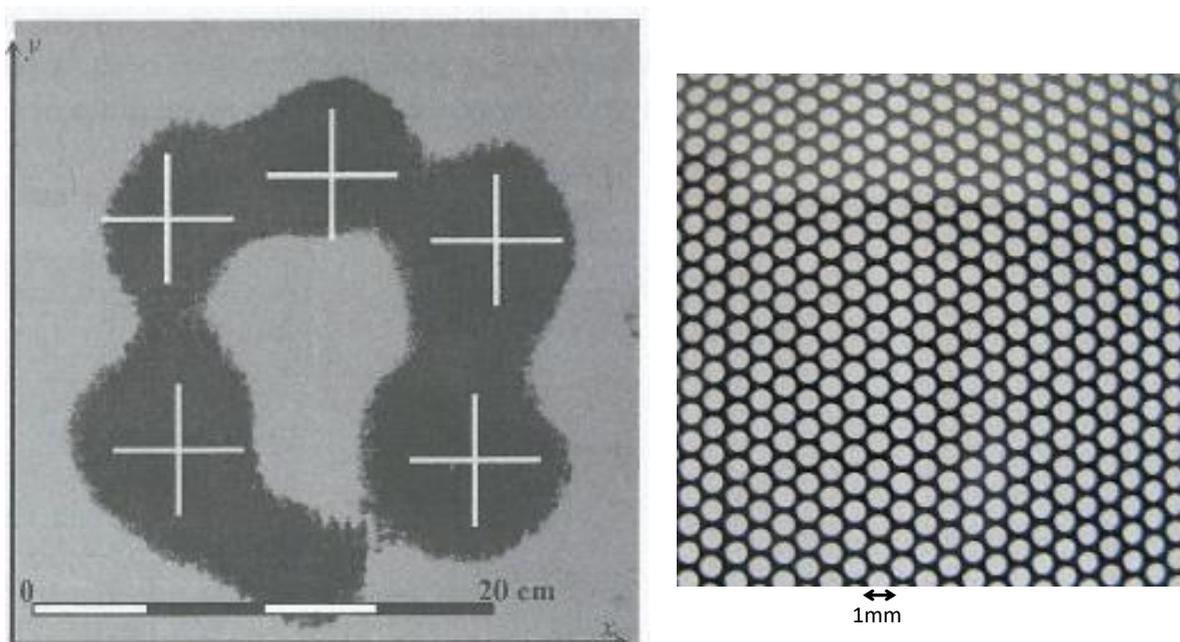


FIGURE 3. Cavity du four. A gauche : le chocolat fondu est repéré par les croix. A droite : détail de la porte d'un four à micro-ondes.

19. En s'aidant de la partie précédente, analyser qualitativement les propriétés des ondes dans la cavité du four. A-t-on affaire à des ondes propagatives ou à des ondes stationnaires (variables séparées)? Quelle est la conséquence sur l'énergie transportée par l'onde (vecteur de Poynting)?
20. On fait fondre un morceau de chocolat dans le four. On constate que par endroit le chocolat a fondu mais que cela n'est pas uniforme. En vous aidant du cliché de la

figure 3 à gauche, calculer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde des ondes dans la cavité. Était-ce prévisible ?

21. Pourquoi est-il nécessaire de faire tourner l'aliment sur un plateau lors de sa cuisson ?
22. La porte d'un four micro-onde est recouverte d'un feuillet métallique comportant des trous d'environ 1 à 2 mm de diamètre (voir Figure 3). Quelle est leur fonction ? Est-ce que cela présente un danger pour l'utilisateur ?