Introduction aux interactions champ-matière 1/3: couplage minimal

S. Fumeron et S. Lebègue

Formation Ingénieur Civil des Mines 2ème année

Novembre 2023

Plan

Contexte

Les mécanismes régissant la dynamique classique d'une charge dans un champ électromagnétique sont bien connus. En présence d'un champ électrique, la charge subit une accélération linéaire (principe du SLAC, des oscilloscopes...). En présence d'un champ magnétique, une charge décrit un mouvement circulaire autour du vecteur-champ : c'est l'effet cyclotron.

Dans un cadre quantique, la notion de trajectoire perd sa signification. Que devient alors la dynamique d'un électron plongé dans un champ ? Comment introduit-on l'interaction électromagnétique dans l'équation de Schrödinger ?

Théorie de Maxwell-Lorentz

L'électrodynamique classique due à Maxwell, Heaviside et Lorentz synthétise l'ensemble des phénomènes électriques, magnétiques et lumineux. Elle se résume en 5 équations (dans le vide) :

$$\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{B} = 0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4}$$

$$\mathbf{F}_L = q\left(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\right) \tag{5}$$

Potentiels et invariance de jauge

A partir des équations de Maxwell, on peut établir que les champs **E** et **B** dérivent de potentiels :

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{6}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \tag{7}$$

Ces définitions des champs font apparaître une symétrie interne d'une très grande importance. En effet, considérons la transformation suivante, appelée *transformation de jauge* de seconde espèce :

$$V' = V - \frac{\partial f}{\partial t} \tag{8}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} f \tag{9}$$

où $f(t, \mathbf{r})$ est une fonction arbitraire mais suffisamment régulière appelée fonction de jauge.

Potentiels et invariance de jauge

En remplaçant dans (7), on trouve que :

$$\mathbf{B}' = \boldsymbol{\nabla} \times \ \mathbf{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \ f) = \boldsymbol{\nabla} \times \ \mathbf{A} = \mathbf{B} \qquad (10)$$

De même, pour (6), on trouve en utilisant le théorème de Schwarz (commutativité des dérivées partielles) que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\boldsymbol{\nabla} \ V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \left(V - \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \ f) \\ &= -\boldsymbol{\nabla} \ V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \qquad (11) \end{aligned}$$

La théorie de Maxwell est donc complètement invariante sous les transformations (8)-(9).

Lagrangien de Schwarzschild

Bien que la force de Lorentz ne dérive pas d'un potentiel, il est néanmoins possible de déduire les équations décrivant la dynamique d'une charge du Lagrangien suivant (Schwarzschild, 1903)

$$L_{part} = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}}.\mathbf{A} - qV \qquad (12)$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont données par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{part}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right) = \frac{\partial L_{part}}{\partial \mathbf{r}} \qquad (13)$$

Impulsion et quantité de mouvement

L'impulsion généralisée de la particule s'écrit :

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L_{part}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{p}_{EM} \tag{14}$$

L'impulsion est la somme de la quantité de mouvement mécanique et d'une quantité de mouvement électromagnétique.
La force généralisée s'écrit quant à elle

$$\frac{\partial L_{part}}{\partial \mathbf{r}} = q\,\boldsymbol{\nabla}(\dot{\mathbf{r}}.\mathbf{A}) - q\,\boldsymbol{\nabla} V \tag{15}$$

On a donc

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}) = q\,\boldsymbol{\nabla}(\dot{\mathbf{r}}.\mathbf{A}) - q\,\boldsymbol{\nabla} V \tag{16}$$

Impulsion et quantité de mouvement

En analyse vectorielle, on sait que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}(\dot{\mathbf{r}}.\mathbf{A}) &= (\mathbf{A}.\boldsymbol{\nabla})\dot{\mathbf{r}} + (\dot{\mathbf{r}}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{r}}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) \\ &= (\dot{\mathbf{r}}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} + \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B} \qquad (17)\end{aligned}$$

On voit que (16) devient

$$\begin{aligned} m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= -q\frac{d\mathbf{A}}{dt} + q(\dot{\mathbf{r}}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} + q\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B} - q\,\boldsymbol{\nabla}V \\ &= -q\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}\right) + q(\dot{\mathbf{r}}.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} + q\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B} - q\,\boldsymbol{\nabla}V \\ &= q\left(-\boldsymbol{\nabla}V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) + q\,\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B} = q\,(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}) \qquad (18)\end{aligned}$$

Fonction de Hamilton sous champ

On passe du formalisme lagrangien au formalisme hamiltonien (adapté à la physique quantique) à l'aide d'une transformation de Legendre :

$$H_{part} = \mathbf{P}.\dot{\mathbf{r}} - L_{part} \tag{19}$$

D'après (14), on a $\dot{\mathbf{r}} = 1/m\,(\mathbf{P} - q\mathbf{A})$ et par substitution, on trouve

$$\begin{aligned} H_{part} &= \mathbf{P}.\dot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - q\dot{\mathbf{r}}.\mathbf{A} + qV \\ &= \frac{1}{m}\mathbf{P}.\left(\mathbf{P} - q\mathbf{A}\right) - \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - q\mathbf{A}\right)^2 - \frac{q}{m}\left(\mathbf{P} - q\mathbf{A}\right).\mathbf{A} + qV \\ &= \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - q\mathbf{A}\right)^2 + qV \end{aligned} \tag{20}$$

Fonction de Hamilton sous champ

Remarques :
1) Le Hamiltonien dépend explicitement des potentiels et n'est pas invariant de jauge : en physique classique, c'est une des rares situations où il ne correspond plus à l'énergie mécanique du système. En revanche, les équations d'Hamilton-Jacobi sont invariantes de jauge.
2) Pour tenir compte des interactions d'une ou plusieurs charges $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec le champ électromagnétique, il faut donc faire les substitutions

$$\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P} - q_i\mathbf{A} \qquad H_{part} \longrightarrow H_{part} + q_i V \tag{21}$$

C'est la prescription de Fock, dite prescription de couplage minimal, car le couplage du champ se fait uniquement avec la partie monopolaire de la distribution de charges et non avec les moments d'ordre supérieur (multipôles).

Un peu d'histoire

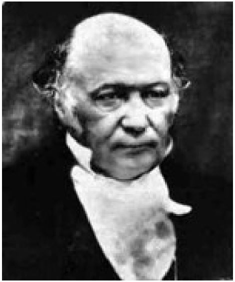
Remarques :

3) Pourquoi le Hamiltonien est noté H ?

Un peu d'histoire

Remarques :

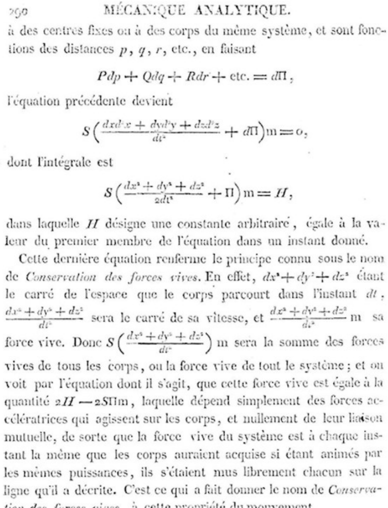
3) Pourquoi le Hamiltonien est noté H ? Par référence à Sir Rowan Hamilton ?



Un peu d'histoire

Remarques :

3) En fait, la toute première occurrence de la notation H vient du traité de Mécanique Analytique de Lagrange... publié en 1811 (Hamilton n'a que 6 ans). Mais alors à qui fait référence Lagrange ?



290 MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

à des centres fixes ou à des corps du même système, et sont fonctions des distances p, q, r, etc., en faisant

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} = d\Pi,$$

l'équation précédente devient

$$S\left(\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} + d\Pi\right)\text{m} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} + \Pi\right)\text{m} = H,$$

dans laquelle H désigne une constante arbitraire, égale à la valeur du premier membre de l'équation dans un instant donné.

Cette dernière équation renferme le principe connu sous le nom de *Conservation des forces vives*. En effet, $dx^2 + dy^2 + dz^2$ étant le carré de l'espace que le corps parcourt dans l'instant dt, $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ sera le carré de sa vitesse, et $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\text{m}$ sa force vive. Donc $S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right)\text{m}$ sera la somme des forces vives de tous les corps, ou la force vive de tout le système ; et on voit par l'équation dont il s'agit, que cette force vive est égale à la quantité $2H - 2S\Pi\text{m}$, laquelle dépend simplement des forces accélératrices qui agissent sur les corps, et nullement de leur liaison mutuelle, de sorte que la force vive du système est à chaque instant la même que les corps auraient acquise si étant animés par les mêmes puissances, ils s'étaient mus librement chacun sur la ligne qu'il a décrite. C'est ce qui a fait donner le nom de *Conservation des forces vives*, à cette propriété du mouvement.

Un peu d'histoire

Remarques :
3) Le Hamiltonien a été noté H par Lagrange en référence à Christian Huyghens :

Un peu d'histoire

C'est un grand classique en histoire des sciences connu sous le nom de loi d'éponymie de Stigler. Autre exemple important pour aujourd'hui :

$$\boldsymbol{F} = q\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

O Heaviside. On the Electromagnetic Effects due to the Motion of Electrification through a Dielectric, Philosophical Magazine (1889).

Invariance de phase globale

Une conséquence du caractère linéaire du Hamiltonien et de l'interprétation de Born est que la physique est inchangée si on multiplie un ket d'état par une phase globale constante $|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = e^{i\alpha}|\psi\rangle$. En effet,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i\alpha}|\psi\rangle\right) = ie^{i\alpha}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = e^{i\alpha}\hat{H}|\psi\rangle \;\Rightarrow\; i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle \tag{22}$$

De même, la probabilité de présence de la particule est inchangée par cette transformation :

$$\begin{aligned} d\mathcal{P}(t,\mathbf{r}) &= |\langle\mathbf{r}|\psi'\rangle|^2 d^3r = \langle\mathbf{r}|\psi'\rangle\langle\psi'|\mathbf{r}\rangle\, d^3r \\ &= e^{i\alpha}\langle\mathbf{r}|\psi\rangle\, e^{-i\alpha}\langle\psi|\mathbf{r}\rangle\, d^3r = |\langle\mathbf{r}|\psi\rangle|^2 d^3r \end{aligned} \tag{23}$$

Invariance de phase locale ?

La forme de $d\mathcal{P}$ suggère que la probabilité de présence est également inchangée si la phase dépend de $\mathbf{r}$ et de t. Qu'en est-il pour l'équation de Schrödinger ?

Soit une charge <u>libre</u> q, on considère la transformation de phase suivante

$$\left|\psi'\right\rangle = \exp\left(i\frac{q}{\hbar}f(t,\mathbf{r})\right)\left|\psi\right\rangle \tag{24}$$

où f est une fonction régulière. L'ensemble des transformations de ce type forme un groupe de Lie = groupe dont les éléments sont étiquetés par un paramètre continu : le groupe unitaire de degré 1, noté U(1). Il est constitué de l'ensemble des nombres complexes de module unité. Comme les éléments de U(1) commutent, le groupe est dit abélien.

Opérations de dérivation

Les dérivées se transforment de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = e^{-i\frac{qf}{\hbar}}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{q}{i\hbar}\frac{\partial f}{\partial t}\right)|\psi'\rangle \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\nabla}|\psi\rangle = e^{-i\frac{qf}{\hbar}}\left(\boldsymbol{\nabla}+\frac{q}{i\hbar}\boldsymbol{\nabla} f\right)|\psi'\rangle \tag{26}$$

En substituant dans l'équation de Schrödinger pour la charge libre, on trouve

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{\nabla} f\right)^2|\psi'\rangle - q\frac{\partial f}{\partial t}|\psi'\rangle \tag{27}$$

L'équation de Schrödinger pour la particule libre n'est donc pas invariante sous les éléments du groupe $U(1)$...

Equations de Maxwell homogènes

... mais néanmoins $U(1)$ laisse inchangée une variante de (22). Introduisons dans l'équation de Schrödinger deux champs a priori généraux, notés $X(t,\mathbf{r})$ et $\mathbf{Y}(t,\mathbf{r})$, de la façon suivante :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\right\rangle = \hat{H}\left|\psi\right\rangle = \frac{\left(\hat{\mathbf{P}} - q\mathbf{Y}\right)^2}{2m}\left|\psi\right\rangle + qX\left|\psi\right\rangle \tag{28}$$

On applique ensuite la transformation de phase locale. D'après (27)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi'\right\rangle = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\left(\mathbf{Y} + \boldsymbol{\nabla} f\right)\right)^2\left|\psi'\right\rangle + q\left(X - \frac{\partial f}{\partial t}\right)\left|\psi'\right\rangle \tag{29}$$

Equations de Maxwell homogènes

Cette équation a la même forme que (28) si les champs "généraux" se transforment de la façon suivante :

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{Y} + \boldsymbol{\nabla} f \tag{30}$$

$$X' = X - \frac{\partial f}{\partial t} \tag{31}$$

Ces transformations sont identiques à (8)-(9). Quelle est la signification physique de ces nouveaux champs ? Puisque $f(t, \mathbf{r})$ est une fonction arbitraire, il n'est pas possible que X et $\mathbf{Y}$ représentent directement des champs physiques : ces derniers doivent au contraire être indépendants de la fonction de jauge f.

Equations de Maxwell homogènes

Prenons le rotationnel de $\mathbf{Y}$:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{Y}' = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{Y} + \boldsymbol{\nabla} f) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{Y} \tag{32}$$

On a donc un nouveau champ, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{Y}$, qui est *indépendant de la fonction de jauge* : il est donc éligible au statut de champ physique.

Puisque $\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla}\times) \equiv 0$, sa divergence est toujours nulle. En comparant avec l'équation de Maxwell-Thomson, on a donc tous les ingrédients pour conclure que

$$\mathbf{Y} \equiv \mathbf{A} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{Y} = \mathbf{B} \tag{33}$$

Equations de Maxwell homogènes

Pour le champ scalaire X, on peut fabriquer le champ physique

$$-\nabla X - \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} \tag{34}$$

Ce champ est inchangé sous (30)-(31). De plus, le rotationnel de ce champ vérifie

$$\nabla \times \left(-\nabla X - \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}\right) = -\underbrace{\nabla \times (\nabla X)}_{=\mathbf{0}} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{Y}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{35}$$

Par comparaison avec l'équation de Maxwell-Faraday, on peut conclure que

$$X \equiv V \qquad -\nabla X - \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = \mathbf{E} \tag{36}$$

Equations de Maxwell inhomogènes

Le théorème de Noether associe à la symétrie $U(1)$ la conservation de la charge électrique. Pourrait-on aussi déduire les équations de Maxwell inhomogènes ?

Il serait inconsistant de chercher à démontrer à partir d'une équation non-relativiste (l'équation de Schrödinger) un système d'équations relativistes (les équations de Maxwell). En toute rigueur, il faudrait raisonner sur l'équation de Dirac :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(c\boldsymbol{\alpha}.\hat{\mathsf{P}} + \beta mc^2\right)\Psi \tag{37}$$

où $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ est un objet appelé bispineur, et

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0_2 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0_2 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathsf{I}_2 & 0_2 \\ -\mathsf{I}_2 & 0_2 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Equations de Maxwell inhomogènes

On peut néanmoins retrouver la forme des 2 équations manquantes grâce au théorème d'Helmholtz :

Théorème d'Helmholtz : *Tout champ vectoriel réel* $\mathbf{C}(\mathbf{r})$*, dérivable, à support borné et de carré intégrable, peut s'écrire comme la somme d'une partie longitudinale et d'une partie transverse telles que :*

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(\mathbf{r}) &= -\boldsymbol{\nabla} V + \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \\
V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3 r' \\
\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3 r'
\end{aligned} \tag{39}$$

Equations de Maxwell inhomogènes

Le problème est bien posé avec la donnée d'une fonction scalaire que l'on note judicieusement $\rho(t, \mathbf{r})$ et qui correspond à la divergence de $\mathbf{E}$:

$$\rho = \varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{E} \tag{40}$$

La constante ε_0 définit l'unité utilisée pour mesurer la densité volumique $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{E}$.
En dérivant cette relation par rapport au temps, on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}.\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{j} \tag{41}$$

C'est la forme d'une équation de conservation dans lequel le second membre contient les courants physiques $\mathbf{j}$ (car invariants de jauge) associés à $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{E}$.

Equations de Maxwell inhomogènes

Comme $\nabla.(\nabla \times) \equiv 0$, la forme générale de ces courants est

$$\mathbf{j} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{Z} \tag{42}$$

où $\mathbf{Z}$ est un champ vectoriel. C'est une équation qui fixe le rotationnel de $\mathbf{Z}$. Il existe trois champs à disposition pour $\mathbf{Z}$: $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. On peut exclure $\mathbf{E}$ car $\nabla \times \mathbf{E}$ a déjà été fixé par (35) et $\mathbf{A}$ dont le rotationnel est déjà défini par (33). Il ne reste donc que $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{j} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \tag{43}$$

où μ_0 est une constante introduite pour garantir l'homogénéité du terme rotationnel. On a donc retrouvé l'équation de Maxwell-Ampère.

Hamiltonien sous champ magnétique constant

Les résultats précédents vont permettre de comprendre comment sont modifiées les énergies propres d'une charge en présence de **B** constant dirigé selon l'axe z.
En raison de la liberté de jauge, on travaille dans la jauge de Landau pour laquelle :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -yB \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

Le Hamiltonien de la charge q s'écrit alors

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\left(\hat{P}_x + qB\hat{y}\right)^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2\right) \tag{45}$$

Décomposition du Hamiltonien

On décompose ensuite ce Hamiltonien en une partie parallèle au champ (axe z) et une partie orthogonale au champ (plan x,y) :

$$\hat{H}_{//} = \frac{1}{2m}\hat{P}_z^2 \tag{46}$$

$$\hat{H}_{\perp} = \frac{1}{2m}\hat{P}_y^2 + \frac{(qB)^2}{2m}\left(\hat{y} + \frac{1}{qB}\hat{P}_x\right)^2 \tag{47}$$

Le sous-hamiltonien $\hat{H}_{//}$ est celui d'une particule libre en mouvement monodimensionnel selon l'axe z. Ses valeurs propres sont donc données par :

$$E_{//} = \frac{p_z^2}{2m} \quad (p_z \text{ réel quelconque}) \tag{48}$$

C'est donc un spectre continu.

Valeurs propres de $\hat{H}_\perp$

Pour la partie orthogonale, on peut récrire le sous-hamiltonien d'une façon intéressante en posant

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= \hat{y} + \frac{1}{qB}\hat{P}_x \\ \hat{P}_Y &= \hat{P}_y \end{aligned}$$

Ce choix est cohérent avec la relation de commutation canonique :

$$\left[\hat{Y}, \hat{P}_Y\right] = \left[\hat{y}, \hat{P}_y\right] + \frac{1}{qB}\underbrace{\left[\hat{P}_x, \hat{P}_y\right]}_{=\hat{0}} = i\hbar\hat{I}$$

Valeurs propres de $\hat{H}_\perp$

En remplaçant dans (47) et en faisant apparaître la pulsation cyclotron ω_c, alors :

$$\hat{H}_\perp = \frac{1}{2m}\hat{P}_Y^2 + \frac{1}{2}m\omega_c^2\hat{Y}^2 \tag{49}$$

Ce Hamiltonien est identique à celui de l'oscillateur harmonique asujetti à un mouvement monodimensionnel à la pulsation ω_c. Son spectre est donc donné par

$$E_\perp = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) \text{ avec } n\text{=0,1,2...} \tag{50}$$

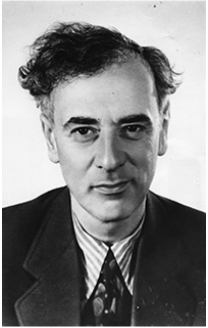
C'est un spectre discret.

Niveaux de Landau

Au final, les niveaux d'énergie du Hamiltonien total sont donc donnés par :

$$E(n, p_z) = \frac{p_z^2}{2m} + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{51}$$

L'ensemble de ces niveaux d'énergie déplacés par le champ magnétique est appelé spectre de Landau.



Bilan

- L'invariance de jauge (locale) de l'équation de Schrödinger sous les éléments de U(1) ne peut être réalisée qu'au prix de l'introduction de deux nouveaux champs compensateurs, V et $\mathbf{A}$.
- Ces champs interagissent toujours avec le champ de matière dans l'état $|\psi\rangle$ via la constante de couplage q.
- Les champs compensateurs modifient l'équation de Schrödinger de la manière suivante

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \frac{\left(\hat{\mathbf{P}} - q\mathbf{A}\right)^2}{2m}|\psi\rangle + qV|\psi\rangle} \qquad (52)$$

C'est la traduction quantique de la prescription de couplage minimal (21).

Bilan

- A partir de ces champs compensateurs, on construit deux champs physiques (invariants de jauge), **E** et **B**, vérifiant les équations de Maxwell homogènes : la symétrie locale $U(1)$ a généré l'interaction électromagnétique.
- En présence d'un champ électromagnétique, les phases de la fonction d'onde sont donc relatives : il n'existe pas d'origine absolue des phases dans l'espace et le temps.

Prolongements

- La matière a été traité quantiquement mais pas le champ électromagnétique = approche semi-classique. La quantication du champ et de ses interactions avec les charges fait l'objet de l'électrodynamique quantique.
- L'étude des interactions champ-matière est un sujet très actif, même pour des champs statiques (effet Hall quantique, effet Hall quantique fractionnaire...).
- Le lien entre symétrie de jauge et interaction est au coeur du modèle standard : l'interaction faible provient de la symétrie $SU(2)$ et l'interaction forte de la symétrie $SU(3)$.

«Symmetry dictates interaction.» CN Yang

TD d'application : Couplage minimal, supraconductivité et effet Josephson