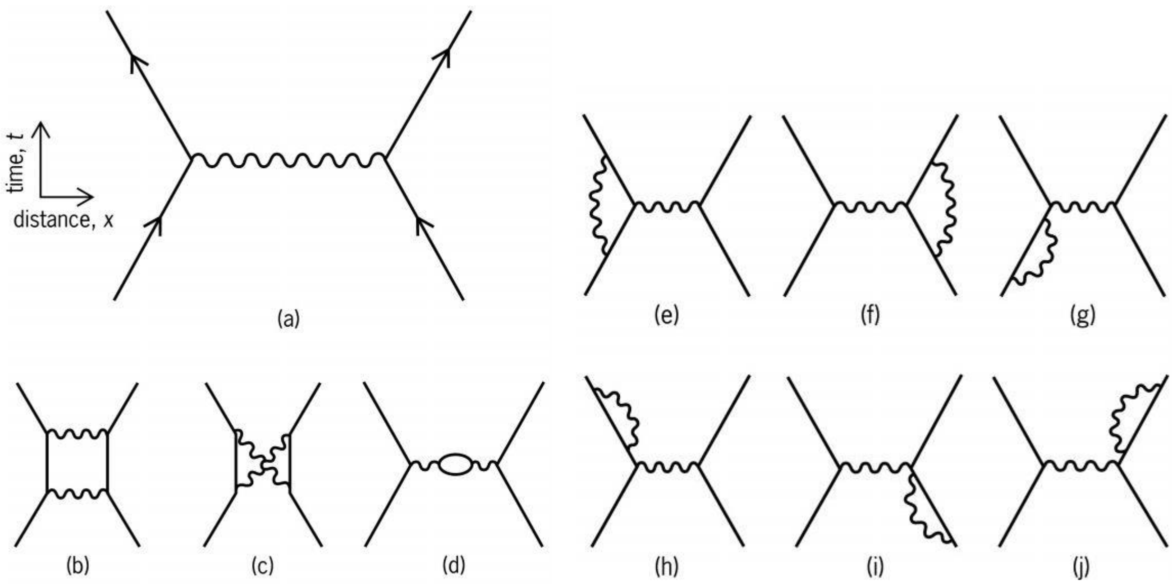
# En guise de conclusion:

# La formulation de Feynman de la théorie quantique



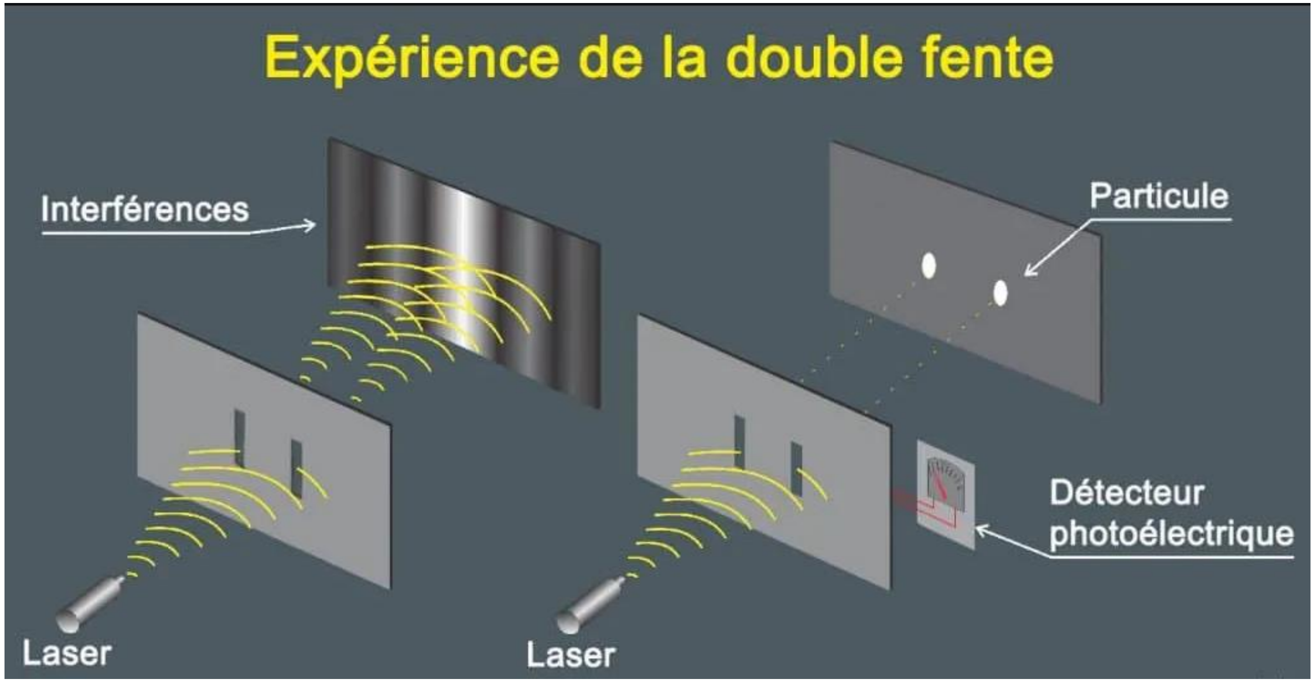

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

**Sébastien Fumeron**

MINES NANCY ARTEM

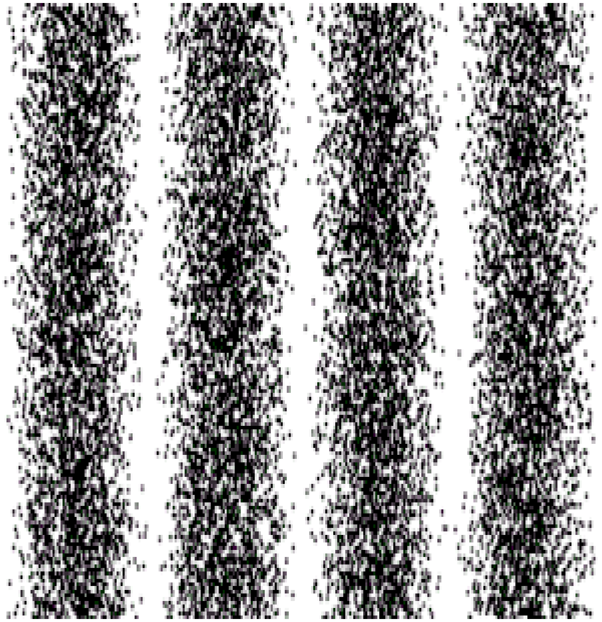
## ▶ Retour sur la « dualité onde-corpuscule »

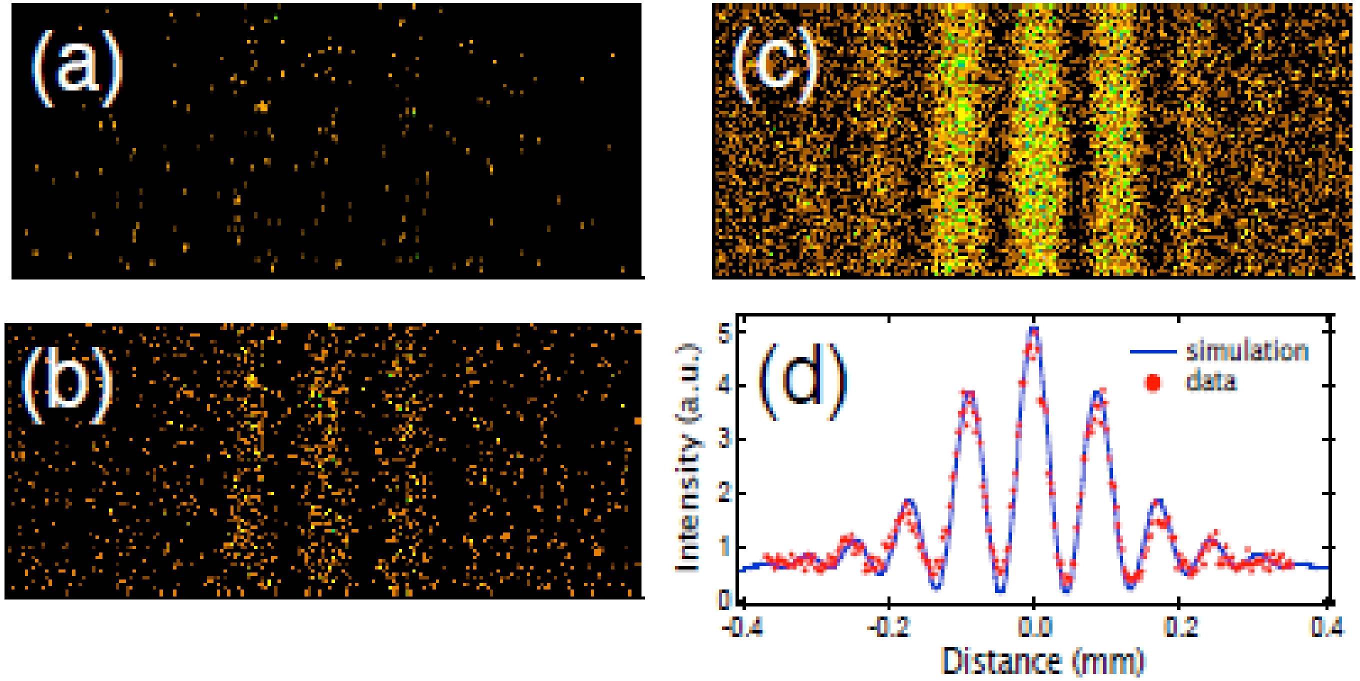
Une onde électromagnétique est composée de photons (corpuscules). Dans l'expérience des fentes d'Young, comment ces photons parviennent-ils à former des franges d'interférences (ondes) ?



## ▶ Retour sur la « dualité onde-corpuscule »

• **L'idée:** Envoyer les photons un par un et regarder en temps réel l'évolution de l'intensité lumineuse






*V Jacques, E Wu, T Toury, F Treussart, **A Aspect**, P Grangier, JF Roch, "Single-photon wavefront-splitting interference - an illustration of the light quantum in action," EPJD, 35 (3) 2005.*

## ▶ Retour sur la « dualité onde-corpuscule »

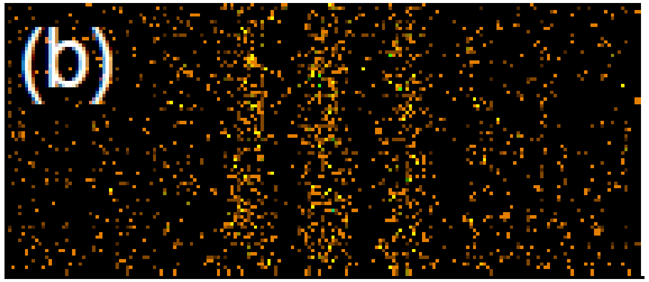
- **Conclusion:** Les photons sont des particules dont la statistique d'ensemble est celle d'une onde.

## ▶ Retour sur la « dualité onde-corpuscule »

- **Conclusion:** Les photons sont des particules dont la statistique d'ensemble est celle d'une onde. A-t-on vraiment tout compris ?

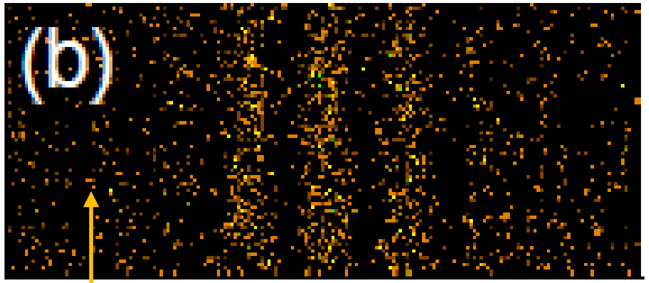
## ▶ Retour sur la « dualité onde-corpuscule »

- **Conclusion:** Les photons sont des particules dont la statistique d'ensemble est celle d'une onde. A-t-on vraiment tout compris ?



## ▶ Retour sur la « dualité onde-corpuscule »

• **Conclusion:** Les photons sont des particules dont la statistique d'ensemble est celle d'une onde. A-t-on vraiment tout compris ?




- Par où est passé ce photon ? La fente de gauche ou celle de droite ?

- Est-ce que les photons suivants ont connaissance des points d'impact des photons précédents pour se répartir en franges ?

## ▶ Une insuffisance formelle

Le formalisme habituel, fondé sur l'équation de Schrödinger, est un formalisme hamiltonien. Aussi efficace qu'il puisse être pour les calculs, il présente un défaut majeur: temps et espace ne sont pas traités de la même façon.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi + V(x,y,z)\psi$$

***ordre 1 en temps***

***ordre 2 en espace***

La version hamiltonienne de la théorie quantique n'est donc pas compatible avec la relativité d'Einstein. Comment faire ?

## ▶ Deux solutions (ou presque):

- **Solution 1:** On construit une équation dynamique à partir de l'énergie totale mais on utilise la formule relativiste (particule libre)

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi c^2 + m^2c^4\psi$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

**Équation de Klein-Gordon**

## ▶ Deux solutions (ou presque):

- **Solution 1:** On construit une équation dynamique à partir de l'énergie totale mais on utilise la formule relativiste (particule libre)

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi c^2 + m^2c^4\psi$$

$$\boxed{\Rightarrow \left( \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)\psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0}$$

**Équation de Klein-Gordon**

Cette équation est bien relativiste mais 1) la donnée de la fonction d'onde à l'instant initial ne permet plus de prédire son évolution, contrairement à l'équation de Schrödinger et 2) l'existence de solutions d'énergies négatives conduit à des densités de probabilité de présence négatives:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \propto \frac{E}{m}$$

## ▶ Deux solutions (ou presque):

- **Solution 2:** On peut essayer se débarrasser du premier problème en cherchant une équation d'ordre 1 en temps et espace = racine carrée de l'opérateur

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_D \Psi = \left[ c\left( \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z \right) + \beta mc^2 \right] \Psi$$

## Deux solutions (ou presque):

- **Solution 2:** On peut essayer se débarrasser du premier problème en cherchant une équation d'ordre 1 en temps et espace = racine carrée de l'opérateur

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_D\Psi = \left[c\left(\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z\right) + \beta mc^2\right]\Psi$$

La contrainte sur les coefficients est de retrouver Klein-Gordon si on dérive deux fois:

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = I$$

$$\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x = 0 \ \ldots\ \alpha_x\beta + \beta\alpha_x = 0$$

## ▶ Deux solutions (ou presque):

- **Solution 2:** On peut essayer se débarrasser du premier problème en cherchant une équation d'ordre 1 en temps et espace = racine carrée de l'opérateur

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_D \Psi = \left[ c\left( \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z \right) + \beta m c^2 \right] \Psi$$

La contrainte sur les coefficients est de retrouver Klein-Gordon si on dérive deux fois:

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = I$$

$$\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = 0 \; ... \; \alpha_x \beta + \beta \alpha_x = 0$$

$\Longrightarrow$ **Ces coefficients ne sont pas des nombres mais des matrices hermitiennes 4X4.**

## ▶ Deux solutions (ou presque):

- **Solution 2:** Ces matrices sont des généralisations des matrices de Pauli qui vérifient le même type de propriétés algébriques

*Représentation de Dirac*

$$\overline{\overline{\alpha}}_k = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\overline{\sigma}}_k \\ -\overline{\overline{\sigma}}_k & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{\beta}} = \begin{pmatrix} \overline{\overline{I}}_2 & 0 \\ 0 & -\overline{\overline{I}}_2 \end{pmatrix} \qquad \Psi = \begin{bmatrix} \psi_{1/2} \\ \psi_{-1/2} \\ \psi^{+}_{1/2} \\ \psi^{+}_{-1/2} \end{bmatrix}$$

## ▶ Deux solutions (ou presque):

- **Solution 2:** Ces matrices sont des généralisations des matrices de Pauli qui vérifient le même type de propriétés algébriques

*Représentation de Dirac*

$$\overline{\overline{\alpha}}_k = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\overline{\sigma}}_k \\ -\overline{\overline{\sigma}}_k & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{\beta}} = \begin{pmatrix} \overline{\overline{I}}_2 & 0 \\ 0 & -\overline{\overline{I}}_2 \end{pmatrix} \qquad \Psi = \begin{bmatrix} \psi_{1/2} \\ \psi_{-1/2} \\ \psi^{+}_{1/2} \\ \psi^{+}_{-1/2} \end{bmatrix}$$

*électron*

*positron*

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ c\left( \overline{\overline{\alpha}}_x p_x + \overline{\overline{\alpha}}_y p_y + \overline{\overline{\alpha}}_z p_z \right) + \overline{\overline{\beta}} mc^2 \right] \Psi$$

**Équation de Dirac (1928)**

## ▶ Deux solutions (ou presque):

**Bilan**:

- L'espace représentant les états a été élargi: ce n'est plus un espace de fonctions à valeurs complexes (fonction d'onde), mais un espace de quadruplets de fonctions à valeurs complexes (bispineur).
- L'équation est relativiste et donne un cadre naturel au spin.
- Elle prévoit l'antimatière (positron détecté par Carl Anderson en 1932).
- … mais le nombre de particules reste désespérément constant…

*Paul Dirac Nobel 1933*

## ▶ Deux solutions (ou presque):

- **Solution 2:** Abandonner la construction des équations dynamiques à partir de l'énergie totale = passage à une **description fondée sur le principe de moindre action.**

Rappels: *En théorie classique, la dynamique d'un système est celle pour laquelle l'action S est stationnaire (ex: principe de Fermat, principe de Maupertuis…)*

$$\boxed{\delta S = 0}$$

*L'action est définie à partir du Lagrangien:* $S_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} L(t, x, \dot{x})dt$

*C'est un formalisme bien adapté à la relativité (contraintes ⇔ multiplicateurs de Lagrange). Ex: particule libre relativiste*

$$S_{AB} = -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} \left( \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \right) dt = -mc \int_A^B ds$$

## ▶ Deux solutions (ou presque):

*Pour une particule non-relativiste, le Lagrangien est simplement*

$$L(t,x,\dot{x}) = E_c\left(\dot{x}\right) - E_p\left(t,x\right)$$

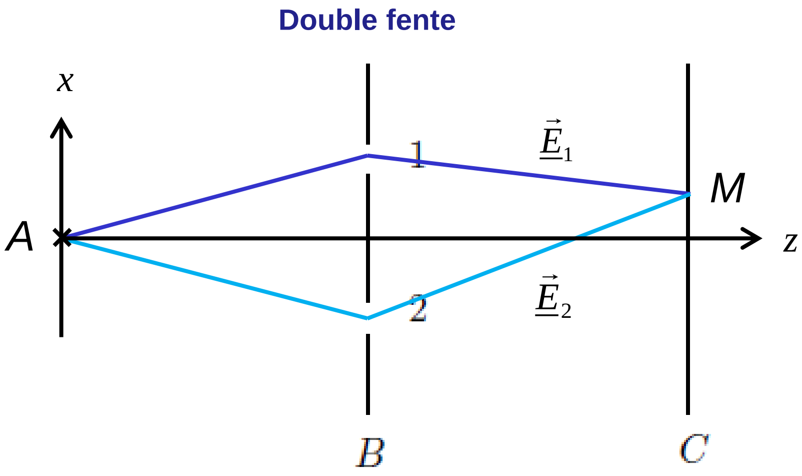
*Pour une particule libre, on a en particulier:*

$$L(t,x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

$$\Rightarrow S_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \left(t_B - t_A\right)\frac{m}{2}\left(\frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}\right)^2 = \frac{m}{2}\frac{\left(x_B - x_A\right)^2}{t_B - t_A}$$

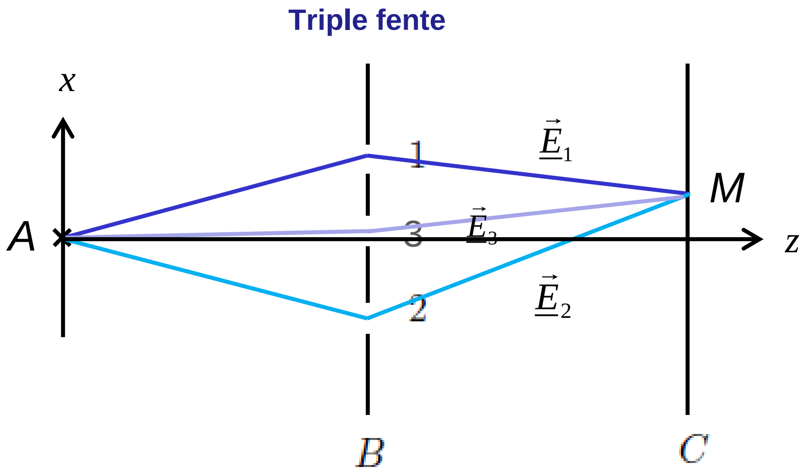
La formulation lagrangienne de la mécanique quantique a été faite par Richard Feynman dans sa thèse de doctorat (1942). On va voir que cette formulation répond aux deux points précédents.

## ▶ L'expérience d'Young selon Feynman




- A = Source de photons $I(M) = \left|\vec{\underline{E}}_1 + \vec{\underline{E}}_2\right|^2$
- A = Source d'électrons $\rho(M) = \left|\psi_1 + \psi_2\right|^2$

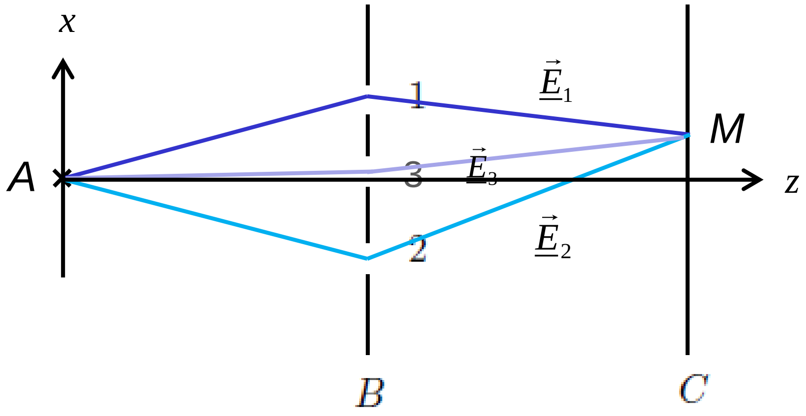
## ▶ L'expérience d'Young selon Feynman




- A = Source de photons $I(M) = \left| \vec{\underline{E}}_1 + \vec{\underline{E}}_2 + \vec{\underline{E}}_3 \right|^2$
- A = Source d'électrons $\rho(M) = \left| \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \right|^2$

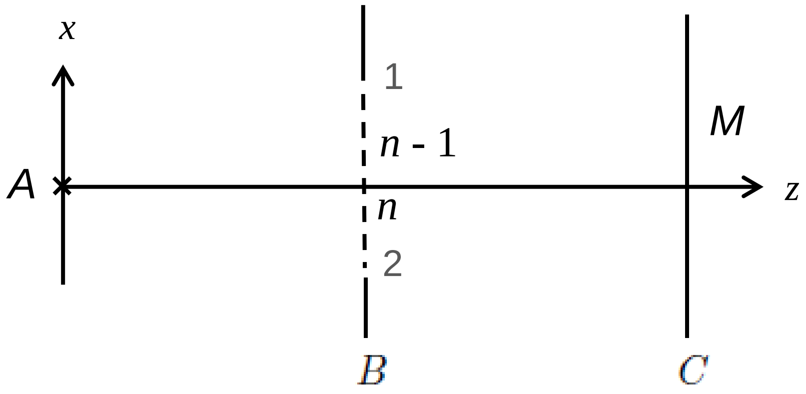
## ▶ L’expérience d’Young selon Feynman

**Triple fente**




- A = Source de photons $I(M) = \left|\vec{\underline{E}}_1 + \vec{\underline{E}}_2 + \vec{\underline{E}}_3\right|^2$
- A = Source d’électrons $\rho(M) = \left|\psi_1 + \psi_2 + \psi_3\right|^2$

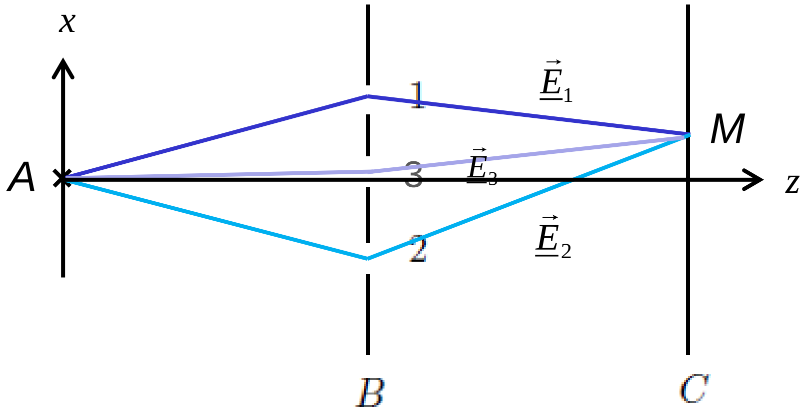
**Multiple fente**




- A = Source de photons $I(M) = \left|\sum_{j=1}^{n} \vec{\underline{E}}_j\right|^2$
- A = Source d’électrons $\rho(M) = \left|\sum_{j=1}^{n} \psi_j\right|^2$

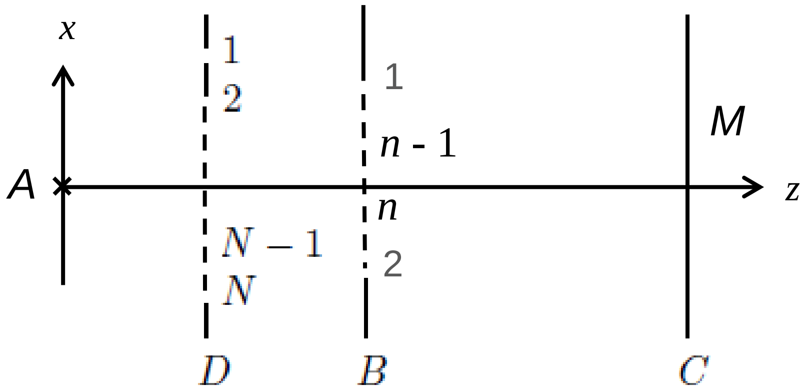
## ▶ L'expérience d'Young selon Feynman

Triple fente




- A = Source de photons $I(M) = \left| \underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}_2 + \underline{\vec{E}}_3 \right|^2$
- A = Source d'électrons $\rho(M) = \left| \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \right|^2$

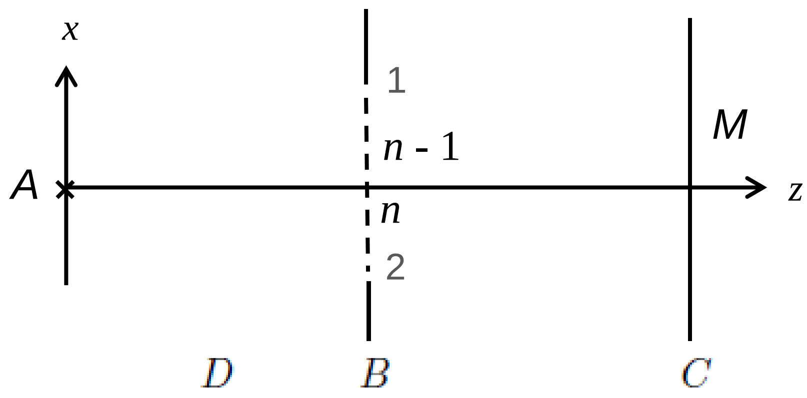
Multiples fentes




- A = Source de photons $I(M) = \left| \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \underline{\vec{E}}_j \left( x_D^k \right) \right|^2$
- A = Source d'électrons $\rho(M) = \left| \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \psi_j \left( x_D^k \right) \right|^2$

## ▶ L'expérience d'Young selon Feynman

**Cas limite 1: N tend vers l'infini**

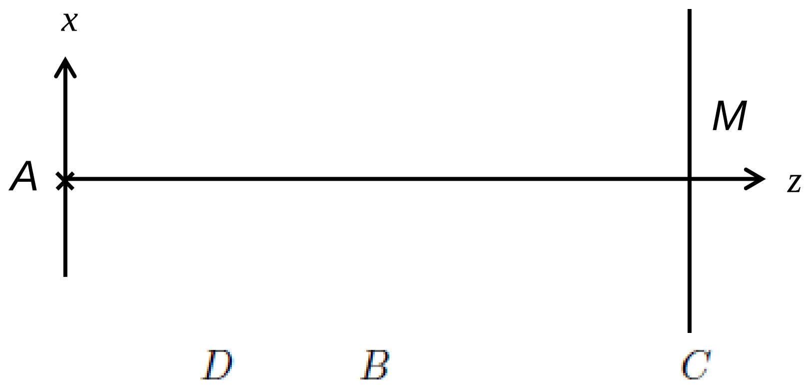



- A = Source de photons $I(M) = \left| \sum_{j=1}^{n} \int \underline{\vec{E}}_j (x_D)\, dx_D \right|^2$

- A = Source d'électrons $\rho(M) = \left| \sum_{j=1}^{n} \int \psi_j (x_D)\, dx_D \right|^2$

## ▶ L'expérience d'Young selon Feynman

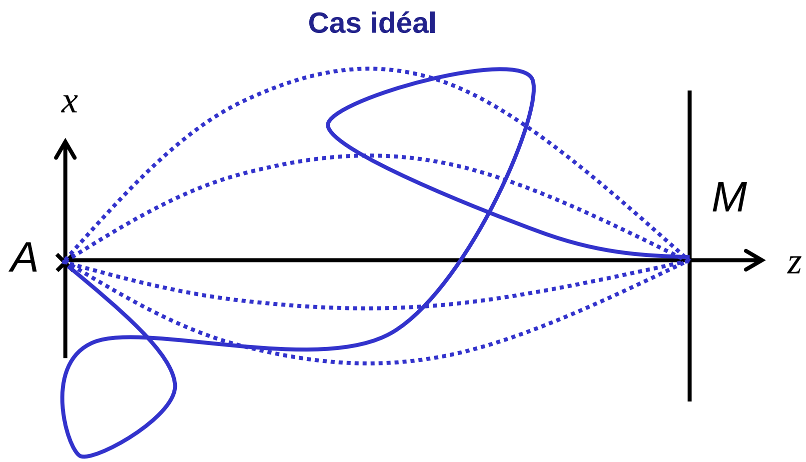
**Cas limite 2: N et n tendent vers l'infini**




- Photons $$I(M) = \left| \int\int \underline{\vec{E}}\left(x_B, x_D\right) dx_D dx_B \right|^2$$
- Electrons $$\rho(M) = \left| \int\int \psi\left(x_B, x_D\right) dx_D dx_B \right|^2$$

$$\psi\left(M\right) = \int\int \psi\left(x_B, x_D\right) dx_D dx_B$$

## ▶ L'expérience d'Young selon Feynman




*Richard Feynman Nobel 1965*

Si on généralise à une infinité d'écrans percés d'une infinité de trous, on constate qu'un phénomène de propagation consiste en une somme sur tous les chemins possibles entre A et M:

$$\psi\left(M\right)=\lim_{N\to+\infty}\int\int\ldots\int\psi\left(x_{D_N},x_{D_1}\right)dx_{D_N}\ldots dx_{D_1}=\sum_{\substack{\text{tous les chemins}\\ \text{possibles }\{x(t),z(t)\}}}\psi\left(x(t),z(t)\right)$$

## Comment formaliser tout cela ?

Revenons à la notation de Dirac. On appelle **opérateur d'évolution** entre deux instants $t_0$ et $t_1$ l'opérateur défini par:

$$\left|\psi(t_1)\right\rangle = \hat{U}(t_1,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle$$

Dans la représentation position $\left|x\right\rangle$, on a $\psi(t_1,x_1) = \left\langle x_1 \middle| \psi(t_1)\right\rangle = \left\langle x_1\right|\hat{U}(t_1,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle$

En utilisant la relation de fermeture $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x_0\right\rangle\left\langle x_0\right| dx_0 = \hat{I}$, on obtient

$$\psi(t_1,x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left\langle x_1\right|\hat{U}(t_1,t_0)\left|x_0\right\rangle\left\langle x_0 \middle| \psi(t_0)\right\rangle dx_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_1,x_1;t_0,x_0)\,\psi(t_0,x_0)\,dx_0$$

## ▶ Comment formaliser tout cela ?

*K* est appelé **propagateur** et il représente l'amplitude de probabilité qu'une particule soit en $x_1$ à l'instant $t_1$ après avoir été en $x_0$ à l'instant $t_0$.

Par itération, on montre facilement que les propagateurs se composent selon la règle

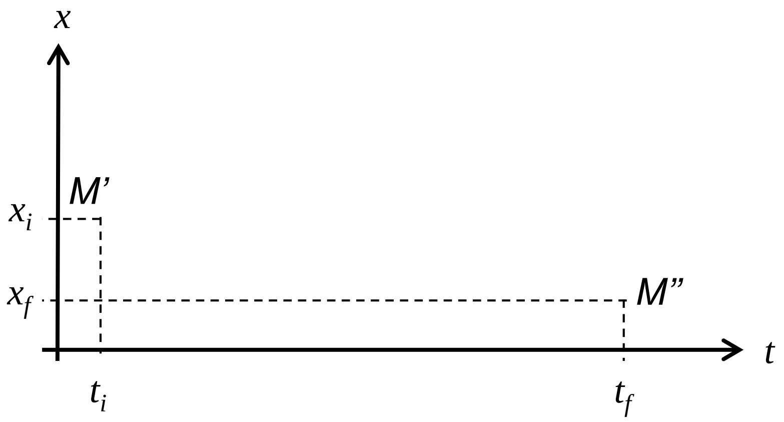
$$K(t_2,x_2;t_0,x_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(t_2,x_2;t_1,x_1)K(t_1,x_1;t_0,x_0)\,dx_1$$

Quand on connaît le propagateur, on connait donc la dynamique de la particule. On a remplacé une équation aux dérivées partielles (équation de Schrödinger) par une équation intégrale équivalente. Comment calculer le noyau de cette équation intégrale ?

## ▶ Les postulats de Feynman

**Postulat 1**

L'amplitude de probabilité $K\left(t_f, x_f; t_i, x_i\right)$ qu'une particule soit en $x_f$ à l'instant $t_f$ après avoir été en $x_i$ à l'instant $t_i$ est constituée par une somme de contributions, une pour chaque « chemin d'espace-temps » reliant $M'\left(t_i, x_i\right)$ à $M''\left(t_f, x_f\right)$.



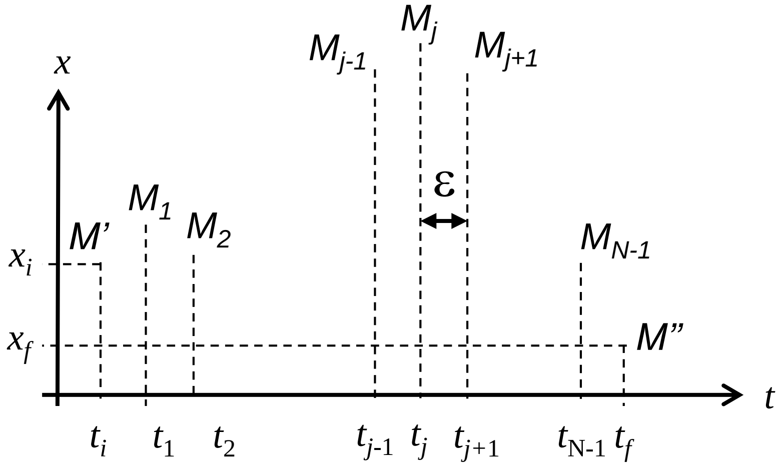
## Les postulats de Feynman

**Postulat 1**

L'amplitude de probabilité $K\left(t_f, x_f; t_i, x_i\right)$ qu'une particule soit en $x_f$ à l'instant $t_f$ après avoir été en $x_i$ à l'instant $t_i$ est constituée par une somme de contributions, une pour chaque « chemin d'espace-temps » reliant $M'\left(t_i, x_i\right)$ à $M''\left(t_f, x_f\right)$.

Feynman définit le chemin d'espace-temps de la façon suivante:

1. On divise l'intervalle de temps $t_f$ - $t_i$ entre M' et M'' en N intervalles égaux de valeur $\varepsilon$.



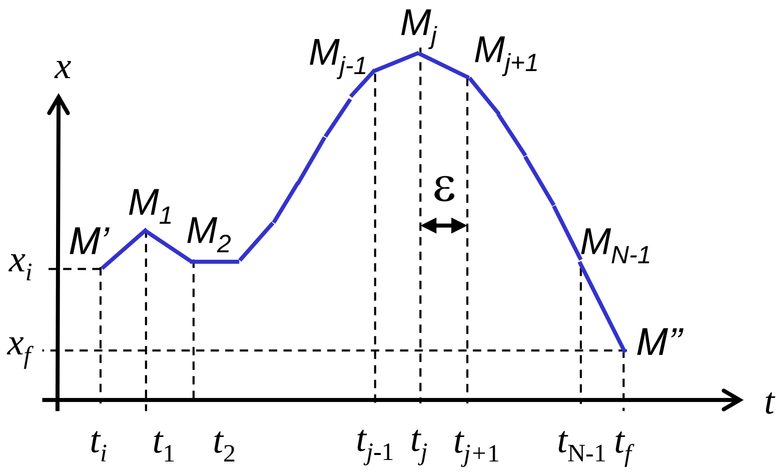
## Les postulats de Feynman

**Postulat 1**

L'amplitude de probabilité $K\left(t_f, x_f; t_i, x_i\right)$ qu'une particule soit en $x_f$ à l'instant $t_f$ après avoir été en $x_i$ à l'instant $t_i$ est constituée par une somme de contributions, une pour chaque « chemin d'espace-temps » reliant $M'\left(t_i, x_i\right)$ à $M''\left(t_f, x_f\right)$.

Feynman définit le chemin d'espace-temps de la façon suivante:

1. On divise l'intervalle de temps $t_f$ - $t_i$ entre M' et M'' en N intervalles égaux de valeur $\varepsilon$.
2. On relie deux points consécutifs $M_i$ et $M_{i+1}$ par le chemin classique entre eux.



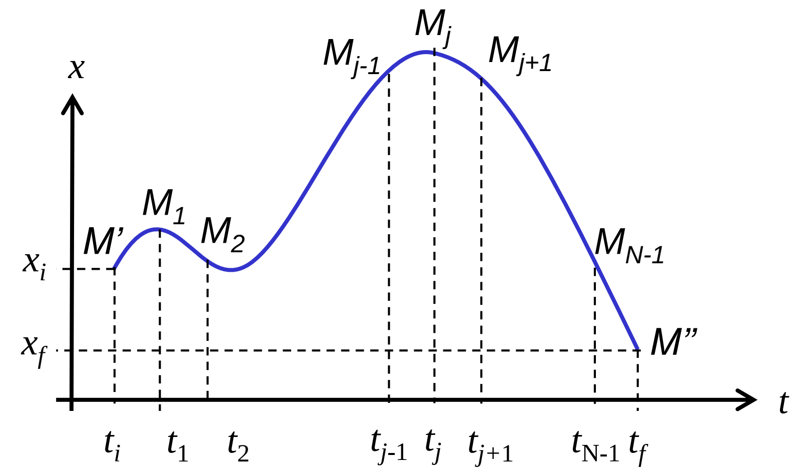
## Les postulats de Feynman

**Postulat 1**

L'amplitude de probabilité $K\left(t_f, x_f; t_i, x_i\right)$ qu'une particule soit en $x_f$ à l'instant $t_f$ après avoir été en $x_i$ à l'instant $t_i$ est constituée par une somme de contributions, une pour chaque « chemin d'espace-temps » reliant $M'\left(t_i, x_i\right)$ à $M''\left(t_f, x_f\right)$.

Feynman définit le chemin d'espace-temps de la façon suivante:

1. On divise l'intervalle de temps $t_f$ - $t_i$ entre M' et M'' en N intervalles égaux de valeur $\varepsilon$.
2. On relie deux points consécutifs $M_i$ et $M_{i+1}$ par le chemin classique entre eux.
3. On fait tendre N $\rightarrow +\infty$.



## ▶ Les postulats de Feynman

La sommation sur les chemins et la loi de composition des propagateurs conduit à l'intégrale:

$$K\left(t_f, x_f; t_i, x_i\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\underbrace{\int\ldots\int}_{\text{N-1 symboles d'intégration}} K\left(t_f, x_f; t_{N-1}, x_{N-1}\right) K\left(t_{N-1}, x_{N-1}; t_{N-2}, x_{N-2}\right)\ldots K\left(t_1, x_1; t_i, x_i\right) dx_{N-1}\ldots dx_1\right)$$

**Postulat 2**

La contribution de chaque chemin élémentaire $K\left(t_{j+1}, x_{j+1}; t_j, x_j\right)$ est égale à

$$K\left(t_{j+1}, x_{j+1}; t_j, x_j\right) = \frac{1}{Z}\exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{M_j M_{j+1}}\right)$$

où Z est un facteur de normalisation et *S* est l'action classique sur le chemin $M_j\, M_{j+1}$.

## ▶ Les postulats de Feynman

*Bicentenaire de l'université de Princeton (1946)*

Feynman. — « *Saviez-vous que ces deux grandeurs étaient proportionnelles ?* »

Dirac. — « *Elles le sont ?* »

Feynman. — « *Oui.* »

Dirac. — « *Oh ! C'est intéressant.* »

## Les postulats de Feynman

En combinant postulat 1 et postulat 2, on obtient

$$K\left(t_f, x_f; t_i, x_i\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{Z^{N-1}}\int\ldots\int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N} S_{M_j M_{j+1}}\right) dx_{N-1}\ldots dx_1\right)$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{Z^{N-1}}\int\ldots\int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{M'M''}\right) dx_{N-1}\ldots dx_1\right)$$

ce que l'on note symboliquement

$$\boxed{K\left(t_f, x_f; t_i, x_i\right) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{M'M''}\right) Dx}$$

**Intégrale de chemin**

## ▶ Interprétation physique

- Pour se propager, une particule quantique emprunte tous les chemins possibles dans l'espace des configurations.

- On comprend maintenant d'où viennent les interférences dans l'expérience d'Young, même en envoyant les photons un par un: le photon emprunte tous les chemins possibles et les franges proviennent des interférences entre les chemins.

- Quand on fait une mesure au niveau d'une des fentes, on brise la superposition des chemins et on perd les franges.

- La limite classique est obtenue lorsque $S \gg \hbar$ : en faisant tendre $\hbar \to 0$ dans l'intégrale de chemin, on montre que seules les contributions proches du chemin classique interfèrent constructivement.

## ▶ Quelques points importants

- L'action qui apparaît dans l'intégrale de chemin est l'action stationnaire calculée à partir d'un principe variationnel <u>classique</u>.

## ▶ Quelques points importants

- L’action qui apparaît dans l’intégrale de chemin est l’action stationnaire calculée à partir d’un principe variationnel classique.

- La formulation de Feynman est équivalente à sa version hamiltonienne: on peut retrouver l’équation de Schrödinger à partir de l’intégrale de chemin et réciproquement (cf TD).

## ▶ Quelques points importants

- L’action qui apparaît dans l’intégrale de chemin est l’action stationnaire calculée à partir d’un principe variationnel <u>classique</u>.

- La formulation de Feynman est équivalente à sa version hamiltonienne: on peut retrouver l’équation de Schrödinger à partir de l’intégrale de chemin et réciproquement (cf TD).

- Malgré son efficacité opératoire, rien ne garantit a priori que l’intégrale de chemin soit bien définie sur un plan mathématique (convergence). Ce travail de formalisation rigoureuse a débuté dans les années 1970 avec les travaux de Cécile DeWitt-Morette.

## ▶ Quelques points importants

- L'action qui apparaît dans l'intégrale de chemin est l'action stationnaire calculée à partir d'un principe variationnel classique.

- La formulation de Feynman est équivalente à sa version hamiltonienne: on peut retrouver l'équation de Schrödinger à partir de l'intégrale de chemin et réciproquement (cf TD).

- Malgré son efficacité opératoire, rien ne garantit a priori que l'intégrale de chemin soit bien définie sur un plan mathématique (convergence). Ce travail de formalisation rigoureuse a débuté dans les années 1970 avec les travaux de Cécile DeWitt-Morette.

- On généralise directement à des problèmes où le nombre de particules n'est pas fixé, en écrivant le propagateur dans la représentation des états cohérents de Glauber.

## ▶ Quelques points importants

- L'action qui apparaît dans l'intégrale de chemin est l'action stationnaire calculée à partir d'un principe variationnel classique.

- La formulation de Feynman est équivalente à sa version hamiltonienne: on peut retrouver l'équation de Schrödinger à partir de l'intégrale de chemin et réciproquement (cf TD).

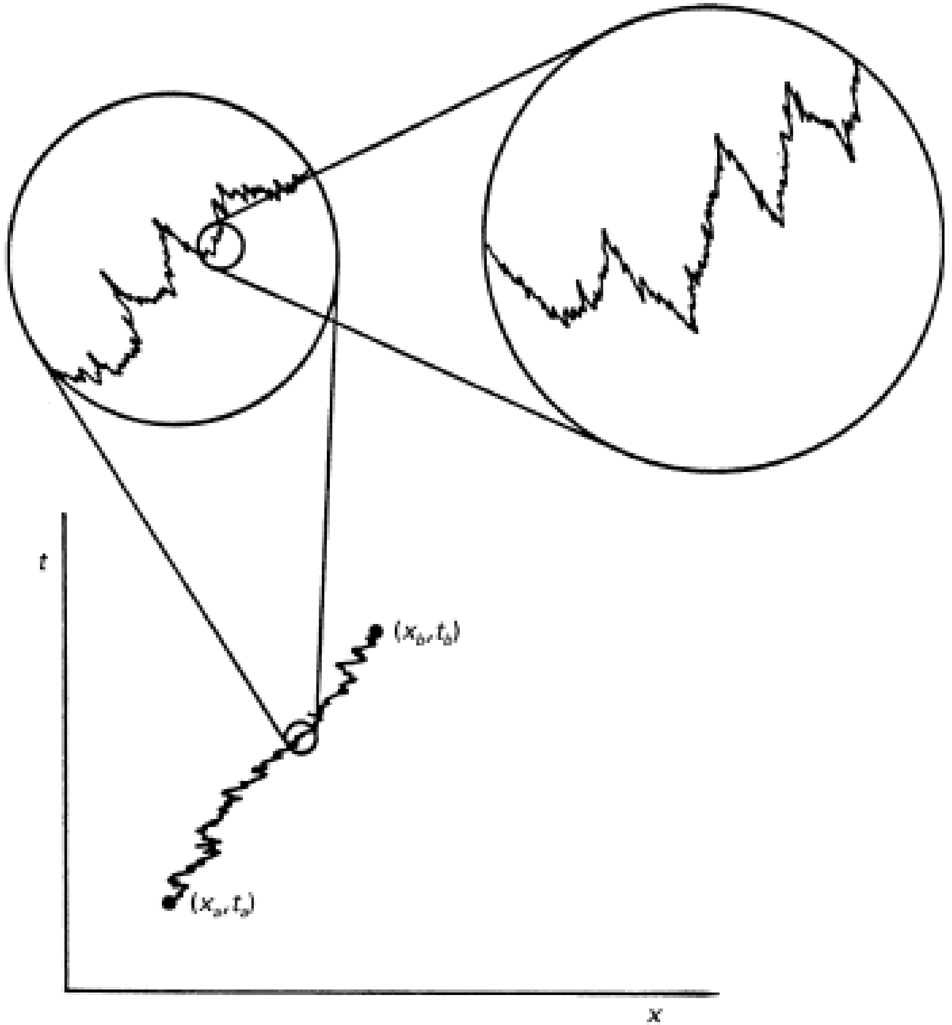
- Malgré son efficacité opératoire, rien ne garantit a priori que l'intégrale de chemin soit bien définie sur un plan mathématique (convergence). Ce travail de formalisation rigoureuse a débuté dans les années 1970 avec les travaux de Cécile DeWitt-Morette.

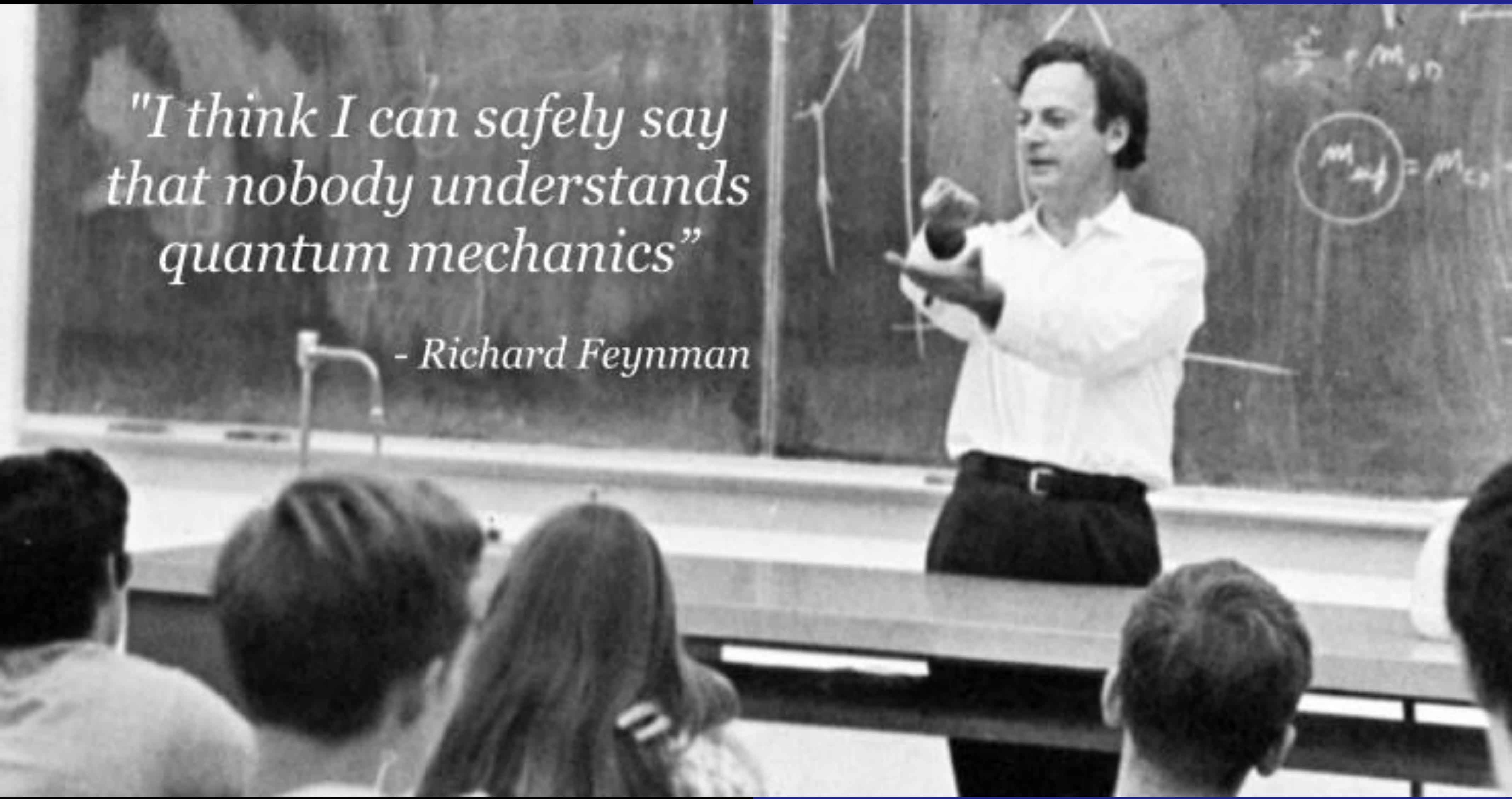
- On généralise directement à des problèmes où le nombre de particules n'est pas fixé, en écrivant le propagateur dans la représentation des états cohérents de Glauber.

- On peut tenir compte du spin mais au prix de nouvelles structures mathématiques (formalisme de Kochetov = algèbre extérieure + variétés symplectiques)

## ▶ Quelques points importants

- Beaucoup de subtilités ont été escamotées. Les fentes présentant une infinité de trous relèvent des ensembles de Cantor et les chemins de Feynman sont également de dimension fractale = lien avec Heisenberg




"I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics"
- Richard Feynman